3. Physikalische Nichtlinearität

3.3 Grundlagen der Plastizitätstheorie

Grundgleichungen der Plastizitätstheorie (1D)

Fließfunktion und Fließbedingung:

$$F(\sigma) = 0$$

Gesamte Dehnungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl}$$

Elastische Dehnungsgeschwindigkeit:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} \quad \longrightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{el} = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

Fließregel:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

Plastische Dehnungsgeschwindigkeit

Grundgleichungen der Plastizitätstheorie (1D)

Konsistenzbedingung:

$$\dot{F}(\sigma) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Lambda = \ldots$$

Belastungs- / Entlastungsbedingungen:

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\dot{\sigma} > 0 & : \quad \text{Belastung} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\dot{\sigma} = 0 & : \quad \text{neutrale Belastung} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\dot{\sigma} < 0 & : \quad \text{Enlastung} \end{cases}$$

Allgemeine Darstellung der Fließfunktionen (2D, 3D)

2 unterschiedliche Darstellungen für die Fließfunktion bzw. Fließbedingung:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

oder

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Hauptspannungen

I_1: 1. Invariante des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$

J_2 : 2. Invariante des Spannungsdeviators $\boldsymbol{s}$

J_3 : 3. Invariante des Spannungsdeviators $\boldsymbol{s}$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

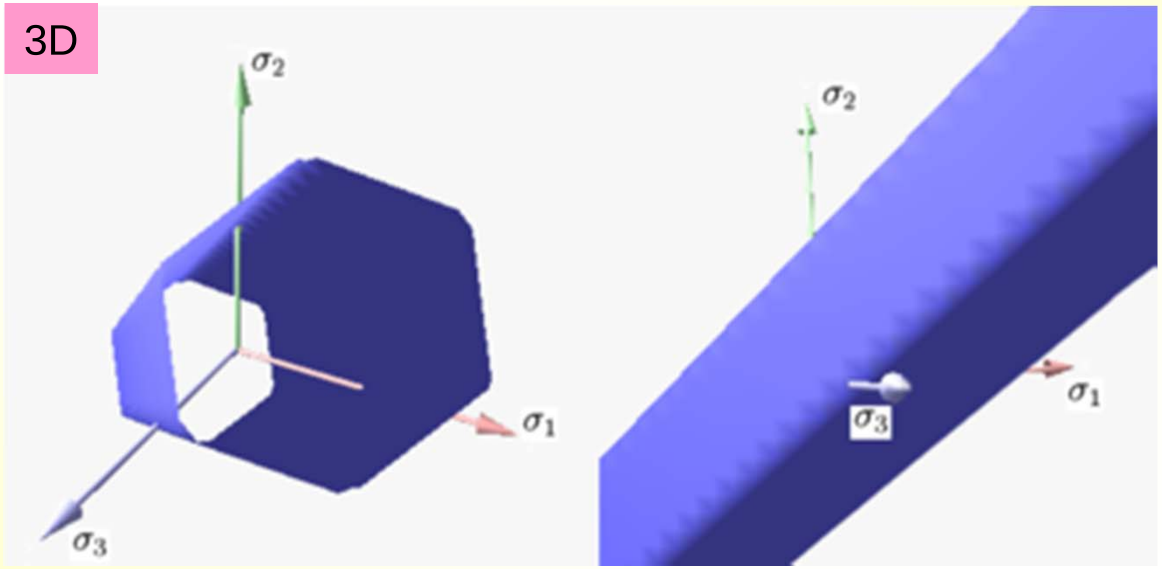
$$J_3 = \det(\boldsymbol{s}) = s_1 s_2 s_3$$

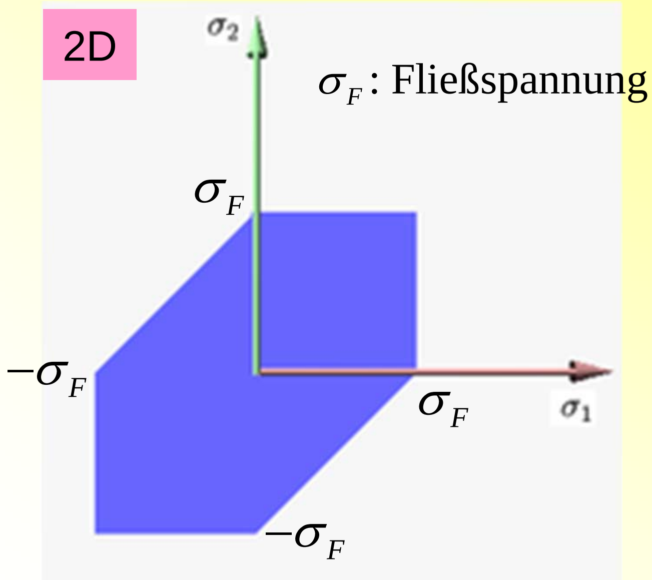
Spannungsdeviator:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_1}{3}\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_M \mathbf{I}$$

s_1, s_2, s_3 : Hauptdeviatorspannungen

Fließbedingung nach Tresca





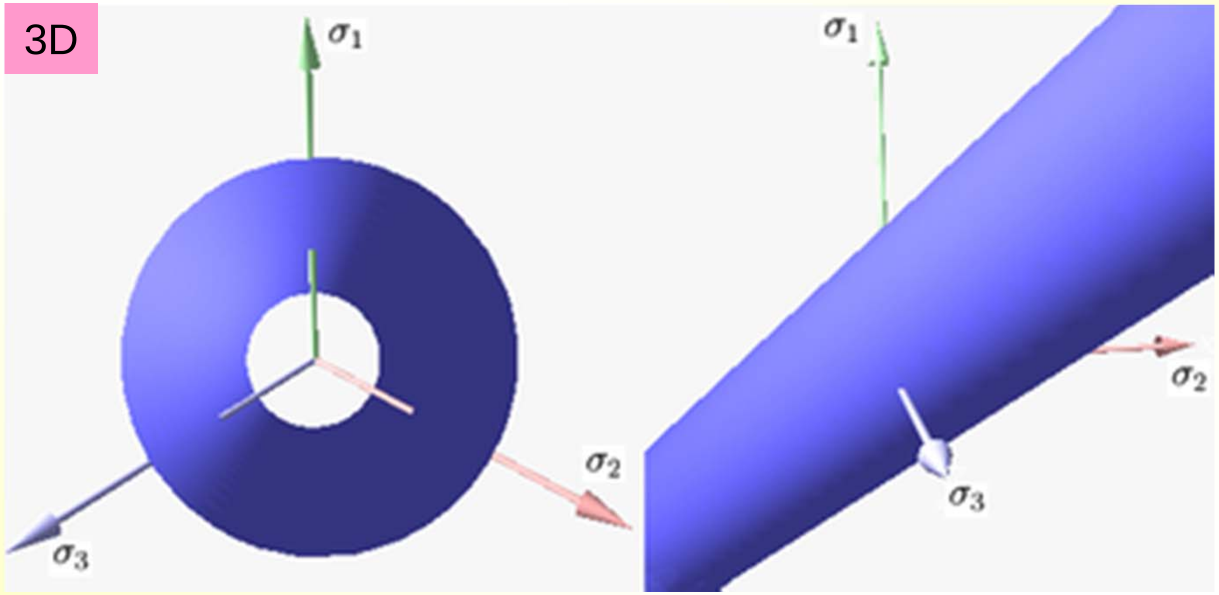
$$\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)=\frac{1}{2}\sigma_F$$

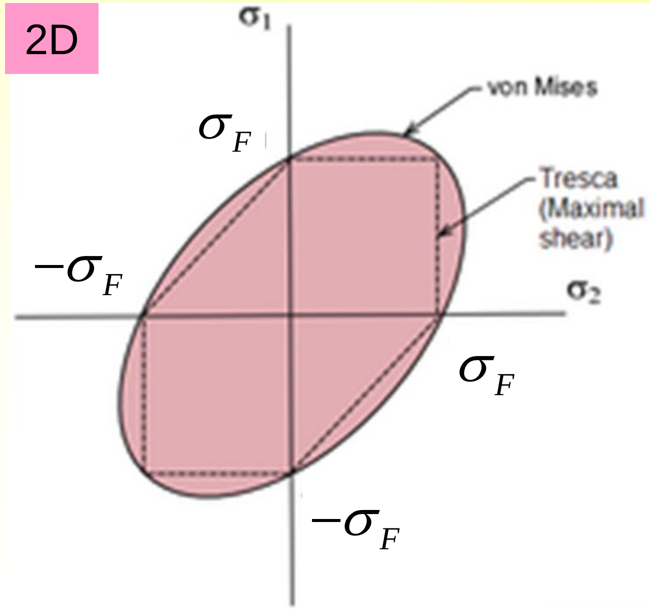
Maximale Schubspannungstheorie

Henri Édouard Tresca (12.10.1814 – 21.06.1885)

(http://en.wikipedia.org)

Fließbedingung nach von Mises





$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_F^2$$

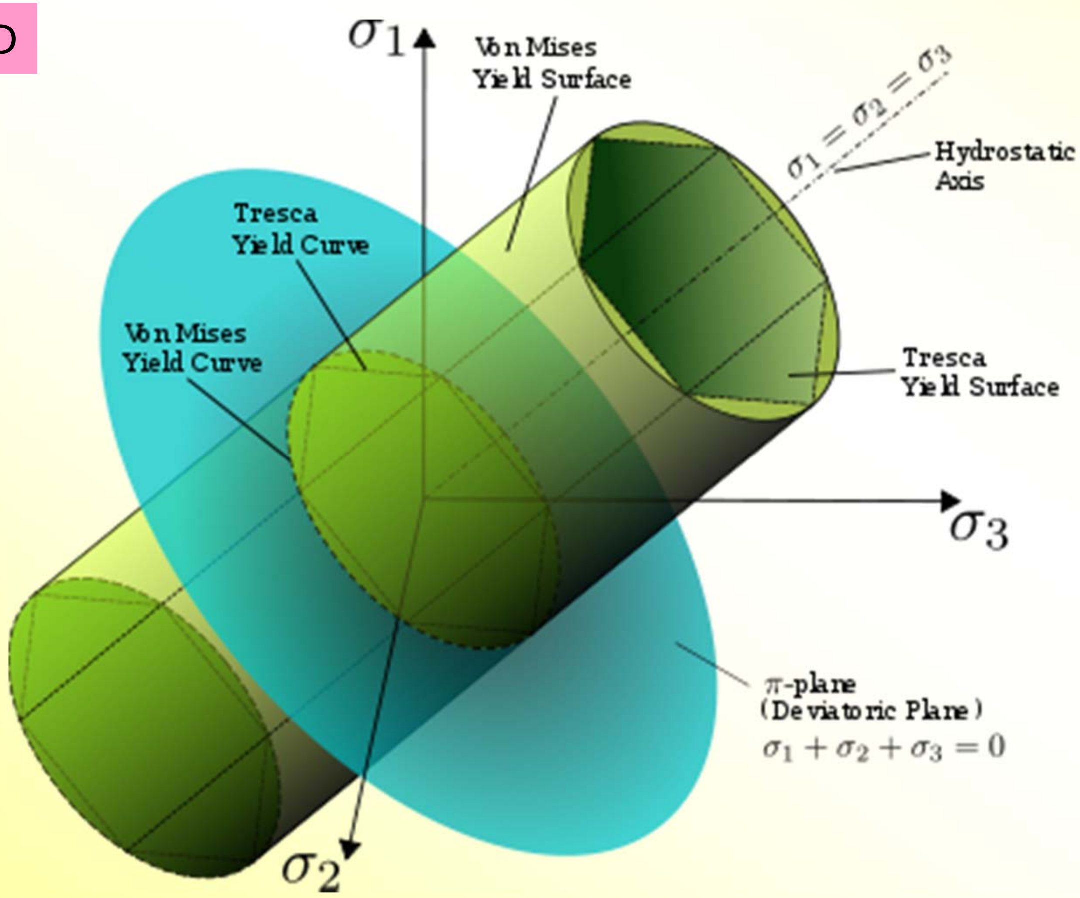
J_2 Plastizitätstheorie, J_2 Fließtheorie

Richard von Mises (19.04.1883 – 14.07.1953)

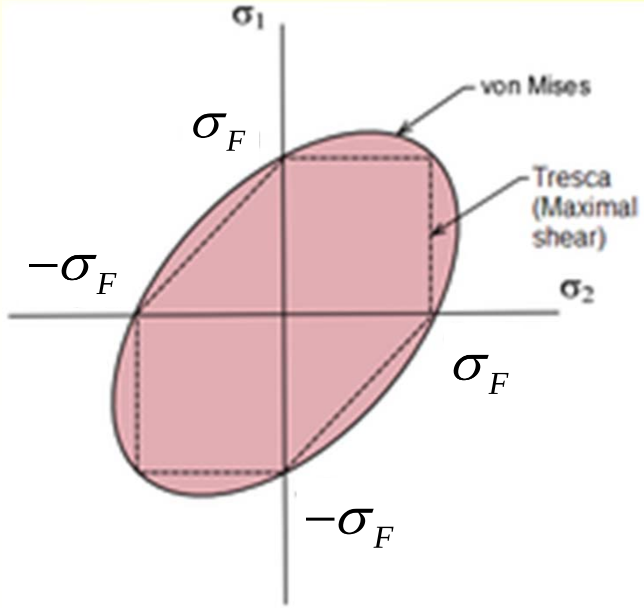
(http://en.wikipedia.org)

Vergleich: Tresca und von Mises

3D

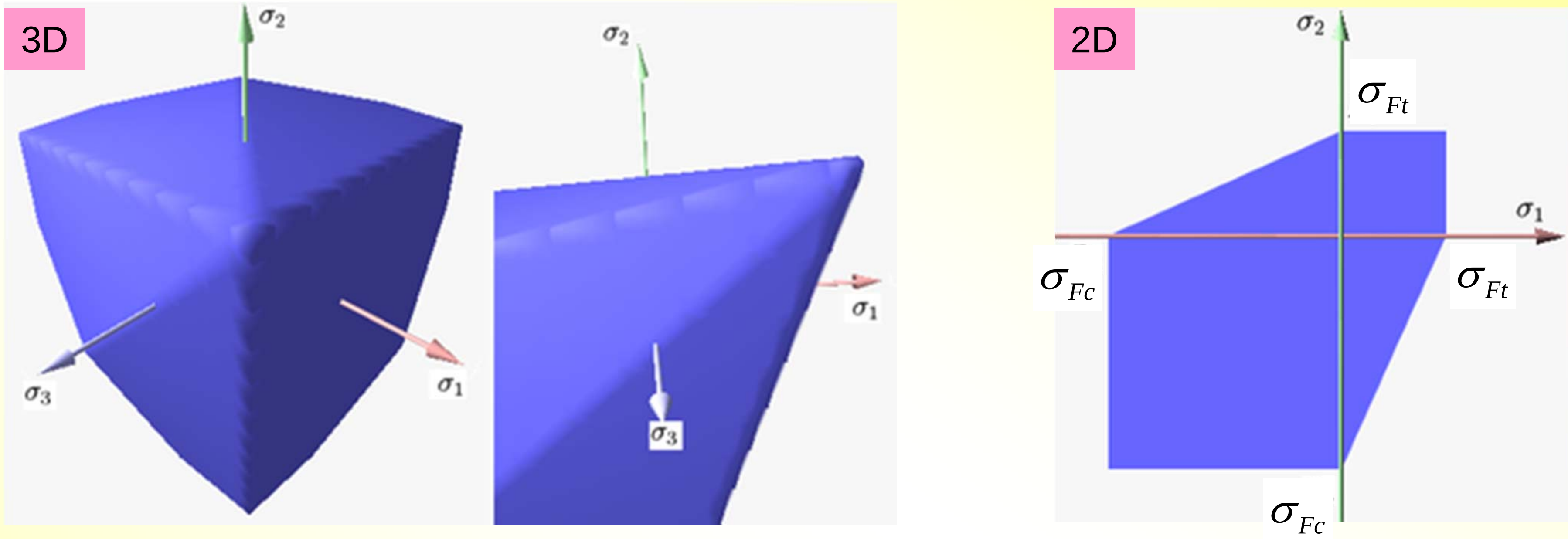


2D



(http://en.wikipedia.org)

Fließbedingung nach Mohr-Coulomb



$$\frac{m+1}{2}\max\left(|\,\sigma_1-\sigma_2\,|+K(\sigma_1+\sigma_2),|\,\sigma_2-\sigma_3\,|+K(\sigma_2+\sigma_3),|\,\sigma_3-\sigma_1\,|+K(\sigma_3+\sigma_1)\right)=\sigma_{Fc}$$

$$m=\frac{\sigma_{Fc}}{\sigma_{Ft}};\quad K=\frac{m-1}{m+1}$$

σ_{Fc}: Fließspannung für Druck (c = compression)

σ_{Ft}: Fließspannung für Zug (t = tension)

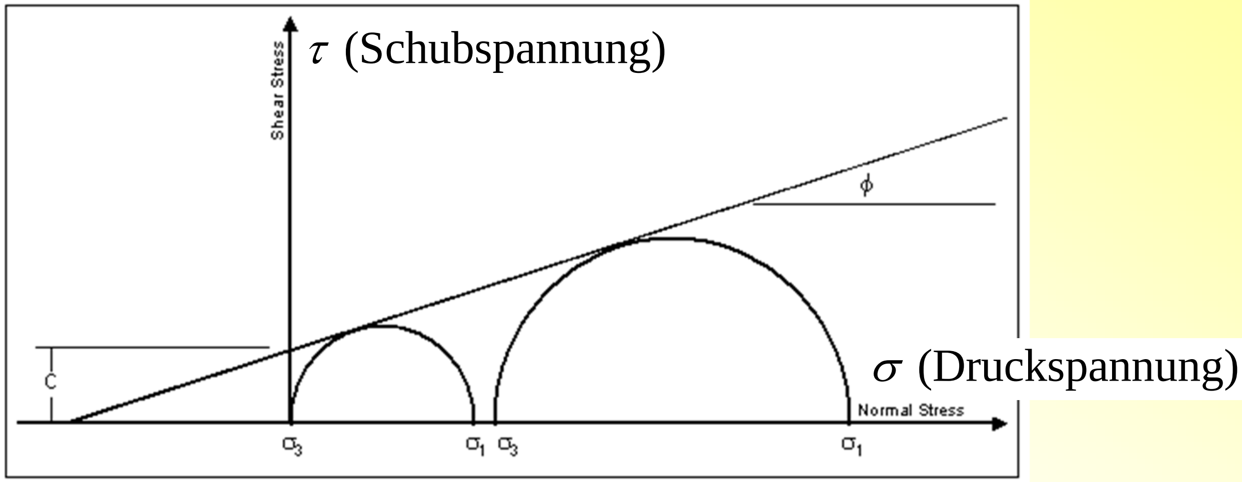
Die Fließbedingung von Mohr-Coulomb reduziert sich zu der Fließbedingung von Tresca, falls $\sigma_{Ft}=\sigma_{Fc}$!

(http://en.wikipedia.org)

Fließbedingung nach Mohr-Coulomb

Christian Otto Mohr
(08.10.1835 – 02.10.1918)

Charles-Augustin de Coulomb
(14.06.1736 – 23.08.1806)



$$\tau = \sigma \tan(\phi) + c$$

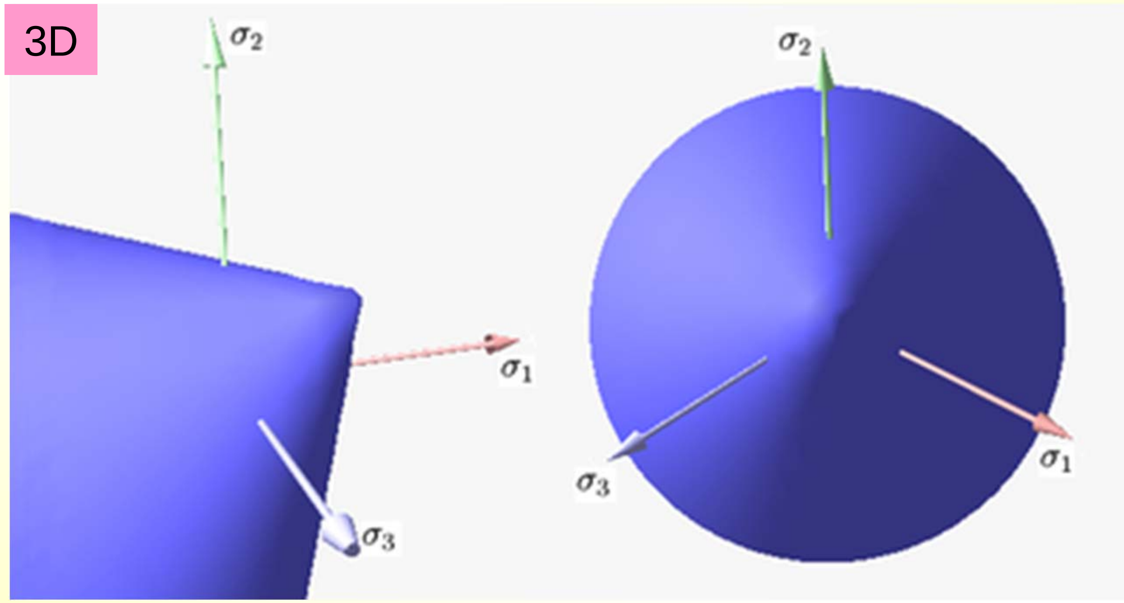
c: Kohäsion

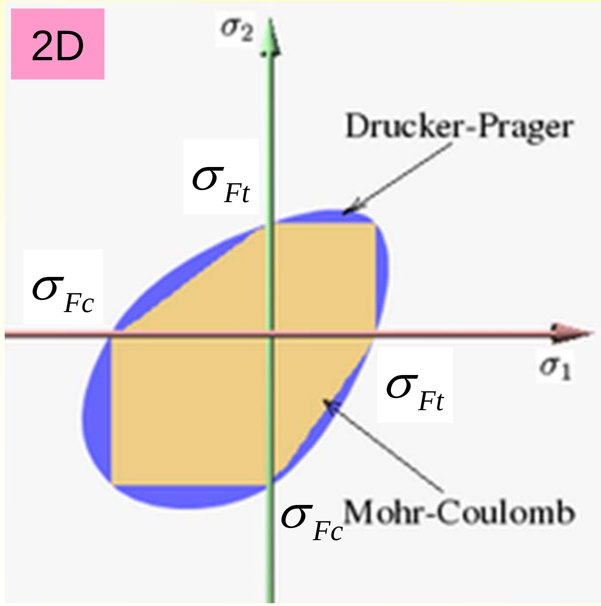
ϕ: innerer Reibungswinkel

Die Fließbedingung von Mohr-Coulomb reduziert sich zu der Fließbedingung von Tresca, falls ϕ=0!

(http://en.wikipedia.org)

Fließbedingung nach Drucker-Prager





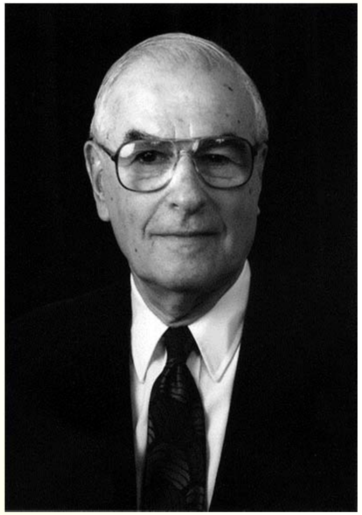
$$\frac{m-1}{2}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)+\frac{m+1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}=\sigma_{Fc}$$

$$m=\frac{\sigma_{Fc}}{\sigma_{Ft}}$$

Die Fließbedingung von Drucker-Prager reduziert sich zu der Fließbedingung nach von Mises, falls $\sigma_{Ft}=\sigma_{Fc}$!

(http://en.wikipedia.org)

Fließbedingung nach Drucker-Prager



Daniel Charles Drucker
(03.06.1918 – 01.09.2001)

William Prager
(23.05.1903 – 16.03.1980)

Andere Darstellung der Fließbedingungen

Es ist einfacher, die folgende Darstellung für die Fließfunktion bzw. Fließbedingung zu verwenden:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0$$

I_1: 1. Invariante des Spannungstensors

J_2 : 2. Invariante des Spannungsdeviators

J_3 : 3. Invariante des Spannungsdeviators

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{s}) = s_1 s_2 s_3$$

Spannungsdeviator:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_1}{3}\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_M \mathbf{I}$$

$\boldsymbol{\sigma}$: Spannungstensor

$\mathbf{I}$: Einheitstensor, Einheitsmatrix

Andere Darstellungen der Fließbedingungen

Tresca:

$$F = 2\sqrt{J_2}\cos\theta - \sigma_F = 0$$

Lode-Winkel:

$$\theta = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}\right) \qquad \left(-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}\right)$$

von Mises:

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma_F = 0$$

Mohr–Coulomb:

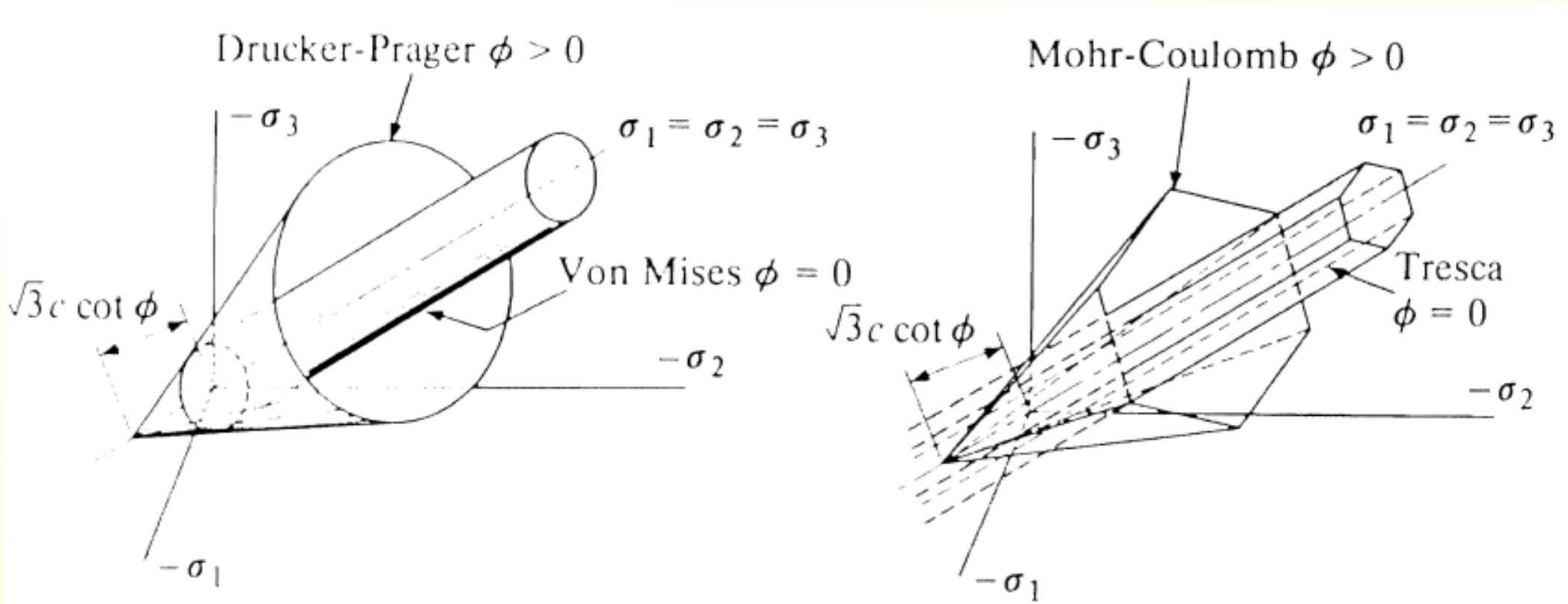
$$F = \frac{I_1}{3}\sin\phi + \sqrt{J_2}\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi\right) - c\cos\phi = 0$$

Drucker–Prager:

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0$$

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}, \quad K = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$

Vergleich von Fließbedingungen



Bemerkungen:

- Die Fließbedingungen von Tresca und von Mises sind geeignet für duktile Werkstoffe (Stahl, Metalle, …).
- Die Fließbedingungen von Mohr-Coulomb und Drucker-Prager sind geeignet für Boden, Beton, Fels, Keramik und körnige Werkstoffe.