

Diskussionsbeitrag: Warum Torricelli doch Recht hat!

Im Beitrag von Malcherek aus 2016 „Die irrtümliche Herleitung der Torricelli-Formel aus der Bernoulli-Gleichung“ wird postuliert, dass die anhand der Bernoulli-Gleichung abgeleitete theoretische Ausflussgeschwindigkeit aus einer Bodenöffnung eines Wasserbehälters mit der Füllhöhe h nach Torricelli falsch sei und stattdessen für die Ausflussgeschwindigkeit die aus der Impulserhaltung hergeleitete Beziehung gelten müsse. Da sich in der Herleitung von Malcherek kein offensichtlicher Fehler finden lässt, wird die Diskrepanz in einer fehlerhaften Annahme vermutet. Diese konnte identifiziert werden: Die berechnete Verschiebung der Gesamtschwerpunkthöhe ist doppelt so groß wie angenommen. Im Beitrag wird gezeigt, dass der theoretische Ansatz von Malcherek mit einer entsprechenden Korrektur die Torricelli-Ausflussgeschwindigkeit als Ergebnis liefert: Torricelli hat doch recht!

Jörg Wieland, Leon Jänicke und Jürgen Jensen

1 Einleitung und Hintergrund

Im Beitrag von Malcherek [3] wird postuliert, dass die anhand der Bernoulli-Gleichung abgeleitete theoretische Ausflussgeschwindigkeit aus einer Bodenöffnung eines Wasserbehälters $v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ mit der Füllhöhe h nach Torricelli, z. B. in Schröder [4] falsch sei und stattdessen für die Ausflussgeschwindigkeit die aus der Impulserhaltung hergeleitete Beziehung $v_A = \sqrt{g \cdot h}$ [3] gelten müsse. Da sich in der Herleitung von Malcherek kein offensichtlicher Fehler finden lässt, wird die Diskrepanz in einer fehlerhaften Annahme vermutet. Diese vermutete fehlerhafte Annahme wird in Kapitel 2 erläutert und in Kapitel 3 werden die entsprechenden Experimente, d. h. Ausflussversuche zu den o. g. Theorien dargestellt. Zunächst wird jedoch für das bessere Verständnis die Herleitung beider Ansätze in Kurzform dargestellt.

1.1 Ausflussgeschwindigkeit nach Torricelli

Die Ausflussgeschwindigkeit nach Torricelli basiert auf dem nachfolgend dargestellten theoretischen Ansatz. Unter Vernachlässigung von Reibung (d. h. bei einer idealen Flüssigkeit) gilt für ein abgeschlossenes Volumen einer Flüssigkeit die folgende Energieerhaltungsgleichung:

Hinweis der Redaktion

Um den fachwissenschaftlichen Diskurs zu fördern, geben wir gerne derartige Beiträge wieder. Dies erfolgt jedoch normalerweise in einer moderierten Form, indem Diskussionsbeitrag und Stellungnahme beiden Verfassern vor der Veröffentlichung bekannt sind und damit der fachliche Austausch an dieser Stelle abgeschlossen wird. In diesem Fall hat Herr Prof. Malcherek auf eine Stellungnahme verzichtet.

Prof. Dr. Stephan Heimerl
Chefredakteur der Fachzeitschrift WasserWirtschaft

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = konstant \quad (1)$$

E_{pot}	Lageenergie ($m \cdot g \cdot h$)
m	Masse [kg]
g	Erdbeschleunigung 9,81 [m/s ²]
h	Behälterfüllhöhe [m]
E_{kin}	Bewegungsenergie ($\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$)
v	Fließgeschwindigkeit [m/s]

Das infinitesimale Flüssigkeitsvolumen mit der Höhe Δh im prismatischen oder zylindrischen Behälter **Bild 1 oben**, besitzt – bezogen auf die Auslassebene des Behälters (= Bezugshorizont, entspricht Ebene z_0 auf Höhe der scharfkantigen Ausflussöffnung am Behälterboden) - folgende Lageenergie:

$$\Delta E_{pot} = \Delta m \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) = \rho \cdot A_0 \cdot \Delta h \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) \quad (2)$$

mit

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A_0 \cdot \Delta h$$

ρ Flüssigkeitsdichte [kg/m³]
 A_0 Behältergrundfläche [m²]

Diese Lageenergie wird über den Flüssigkeitsschweredruck verlustfrei als Druckenergie in das betragsmäßig gleiche Flüssigkeitsvolumen direkt über dem Behälterboden übertragen. Für die Druckenergie in der untersten Wasserschicht mit der Höhe Δh gilt demnach:

$$\Delta E_{Druck} = p \cdot \Delta V = \rho \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot A_0 \cdot \Delta h \quad (3)$$

mit

$$p = \rho \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right)$$

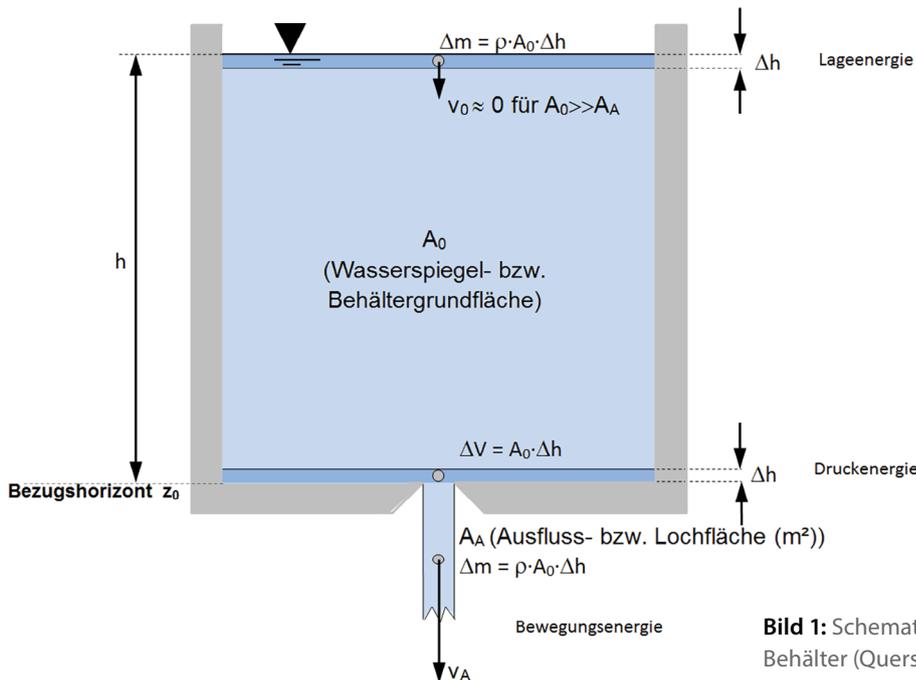


Bild 1: Schematische Darstellung Ausfluss aus einem Behälter (Querschnitt)

Wie zu erkennen ist, sind die Gl. (2) und (3) betragsmäßig identisch. Durch die Öffnung im Behälter kann die Druckenergie des betrachteten diskreten Flüssigkeitsvolumens beim Ausfließen (verlustfrei) in Bewegungsenergie umgewandelt werden, die zugehörige Gleichung lautet:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_0 \cdot \Delta h \cdot v_A^2 \quad (4)$$

Gleichsetzen der betragsmäßig identischen Energien (Gl. (3) und (4)) liefert:

$$\Delta E_{Druck} = \Delta E_{kin}$$

$$\rho \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) \cdot A_0 \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_0 \cdot \Delta h \cdot v_A^2$$

$$2 \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right) = v_A^2$$

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h - \frac{\Delta h}{2}\right)} = v_A$$

v_A mittlere Ausflussgeschwindigkeit [m/s]

Da Δh „vernachlässigbar klein“ (≈ 0) angenommen wird, bleibt der bekannte Term der Torricelli-Ausflussgeschwindigkeit (unter Vernachlässigung der zusätzlichen gravitationsbedingten Geschwindigkeitszunahme unterhalb der Behältergrundfläche) übrig, es gilt die bekannte Torricelli-Geschwindigkeit:

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (5)$$

1.2 Ausflussgeschwindigkeit nach Malcherek

Demgegenüber verwendet Malcherek in der Herleitung der Ausflussgeschwindigkeit v_A den Impulssatz und die mechanische Energieerhaltungsgleichung mit Berücksichtigung von Arbeit am System. Es gilt:

$$dE_k + dE_p = dW \quad (6)$$

mit

$$dE_k = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_0 \cdot v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right)$$

$$dE_p = -\rho \cdot A_0 \cdot g \cdot h \cdot \Delta h$$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot \Delta h \cdot (A_0 - A_A)$$

- dE_k Änderung der kinetischen Energie nach Ausfließen einer Δh entsprechenden Wassermenge
- A_0 Behältergrundfläche [m²]
- dE_p Änderung der potenziellen Energie nach Ausfließen einer Δh entsprechenden Wassermenge
- dW Arbeit bei der Absenkung des Schwerpunkts der Wassermasse durch Ausfließen einer Δh entsprechenden Wassermenge

Nach Einsetzen dieser Terme in Gl. (6) folgt:

$$\frac{1}{2} \cdot v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) - g \cdot h = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right)$$

$$v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) - 2 \cdot g \cdot h = -g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right)$$

$$v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) = g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right)$$

$$v_A^2 = \frac{g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right)}{\left(1 + \frac{A_A}{A_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right)}$$

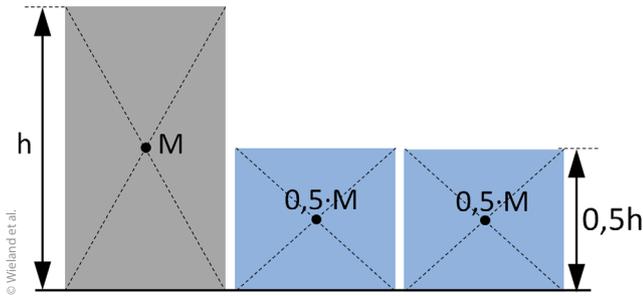


Bild 2: Vergleich potentieller Energie- und Schwerpunktlagen identischer Wassermassen M mit Pegelhöhen von h und $0,5 h$

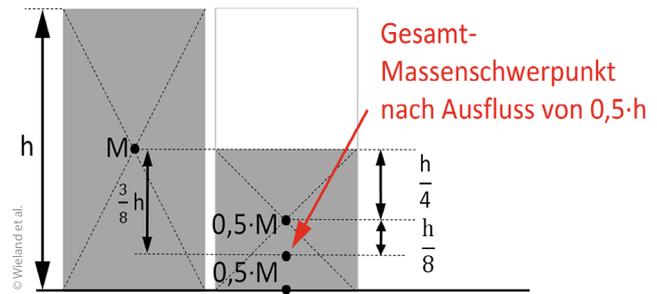


Bild 3: Grafische Darstellung des Schwerpunktverschiebeweges bei seitlichem Ausfluss auf die Aufstandsfläche (links der volle Behälter, rechts der Behälter nach Ausfluss von h auf $0,5 h$)

Übrig bleibt für v_A dann folgende Beziehung:

$$v_A = \sqrt{\frac{g \cdot h}{1 + \frac{A_A}{A_0}}}$$

Für eine im Verhältnis zur Behälterfläche A_0 sehr kleine Öffnungsfläche A_A ergibt sich als Grenzwert die von Malcherek [3] vorgestellte Ausflussgeschwindigkeit:

$$v_A = \sqrt{g \cdot h} \quad (7)$$

Den Herleitungen von Gl. (5) und (7) folgend, ergibt sich der erstaunliche Differenzfaktor von $\sqrt{2}$ für die Ausflussgeschwindigkeit. Aber wie lässt sich diese Diskrepanz erklären? Dass die Gleichung von Malcherek nur für scharfkantige Öffnungen ohne Verlustbeiwert „bessere“ Ergebnisse im Vergleich zu Experimenten als der Torricelli-Originalansatz liefert, ist bemerkenswert und soll im Folgenden untersucht werden. Die Überprüfung der Randbedingungen und Herleitung hinsichtlich der Impuls- und Energieerhaltung zeigt keinen offensichtlichen Fehler. Das haben die Einwendungen der Professoren Aigner [1] und Valentin [5] gezeigt. Also tatsächlich eine neue Ausflussformel, die die bisherigen (sehr alten und etablierten) Erkenntnisse in Frage stellen?

2 Modellansatz seitlicher Ausfluss

Nach vielen Überlegungen und Diskussionen mit den Mitautoren konnte schließlich die fehlerhafte Annahme beim Ansatz von Malcherek [3] identifiziert werden. Zur Erläuterung wird der folgende Modellansatz herangezogen: Der zentrische Ausfluss aus dem Behälter aus dem Behälterboden nach unten ist ein Sonderfall, der im Folgenden diskutiert bzw. hinterfragt werden soll. Für die korrekte Schwerpunktberechnung beim Ausfluss einer idealen Flüssigkeit ist die Betrachtung des seitlichen Ausflusses auf die Aufstandsfläche (= Bezugshorizont) erforderlich. Dazu zeigt **Bild 2** links einen Wasserbehälter (grau) mit der Flüssigkeits-Masse M und der Höhe h . Rechts

daneben stehen zwei identische Wasserbehälter (blau) mit der gleichen Grundfläche, aber mit der halben Höhe im Vergleich zum linken Behälter. Die beiden kleinen Behälter beinhalten zusammen die gleiche Masse M wie der große Behälter. Bezogen auf die gemeinsame Aufstandsfläche der Behälter liegt die Schwerpunkthöhe des großen (grauen) Behälters auf folgender Höhe:

$$s_{y,g1} = \frac{h}{2}$$

Der gemeinsame Schwerpunkt der beiden kleinen (blauen) Behälter liegt auf der Höhe:

$$s_{y,g2} = \frac{h}{4}$$

Bezogen auf die gemeinsame Aufstandsfläche der Behälter ist die potenzielle Energie des großen Behälters:

$$W_{pot,1} = M \cdot g \cdot \frac{h}{2}$$

Die Summe der potenziellen Energie der beiden kleinen Behälter ist demnach:

$$W_{pot,2} = 2 \cdot \frac{M}{2} \cdot g \cdot \frac{0,5 \cdot h}{2} = M \cdot g \cdot \frac{h}{4}$$

Daher ist die Summe der potenziellen Energie in den beiden kleinen Behältern nur halb so groß wie die potenzielle Energie im großen Behälter, es gilt:

$$W_{pot,2} = \frac{1}{2} \cdot W_{pot,1}$$

Bezogen auf einen kleinen Behälter ist also nur noch 1/4 der potenziellen Anfangsenergie im Vergleich zum großen Behälter gespeichert. Das heißt, dass bei Absenkung des Wasserspiegels im großen Behälter auf die Hälfte der Ursprungshöhe 3/4 der anfangs gespeicherten potenziellen Energiemenge den Behälter verlassen haben müssen. Aufgrund der Energieerhaltung muss sich dementsprechend hierbei auch der Schwerpunkt der Gesamtmasse M um 3/4 seiner Starthöhe über der Bezugsebene (Behälterboden) abgesenkt haben, so dass dieser nun tiefer als

der Teilschwerpunkt der restlichen Masse im Behälter liegt (**Bild 3**).

Wie lässt sich dieser scheinbare Widerspruch erklären? **Bild 3** zeigt dazu links den Behälter in vollem Zustand, im Bild rechts ist exakt die Hälfte der Ausgangswassermenge ausgelaufen.

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die ausgelaufene Hälfte der Wassermasse M weiträumig auf der Aufstandsfläche um den Behälter verteilt hat, so dass der Teilschwerpunkt des ausgelaufenen Wassers auf Höhe der Bezugsebene in der Mitte des Behälterbodens angenommen werden kann. Da sich in diesem betrachteten Zustand genau die andere Hälfte der Ausgangswassermenge im Behälter befindet, liegt der gemeinsame Massenschwerpunkt in der Mitte zwischen den Schwerpunkten der beiden Teilmengen (im Behälter). Der Verschiebeweg der Gesamtmasse M bei Auslaufen der Hälfte des Wassers ergibt sich so zu $s_{sw} = 3/4 \cdot h/2 = 3/8 \cdot h$ (**Bild 2**), bei einer verbleibenden Schwerpunkthöhe $s_{y,M} = 1/8 \cdot h$. Die von der Wassermasse beim Absinken um $\Delta h \cong 0,5 \cdot h$ verrichtete Arbeit ist demnach:

$$\Delta E = M \cdot g \cdot \frac{3}{8} \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot A_0 \cdot h^2$$

Die o. g. Schwerpunktverschiebung widerspricht aber der Annahme von Malcherek, der für die Schwerpunkthöhe der Flüssigkeit folgende Beziehung angibt [3]:

$$h_{s,e} = \frac{1}{2} \cdot (h - \Delta h) \tag{8}$$

Dieser Term gibt aber nur die Schwerpunkthöhe der Restflüssigkeit im Behälter, aber nicht die neue Schwerpunkthöhe der betrachteten gesamten Wassermasse an.

Anhand des Beispiels (**Bild 3**) ist erkennbar, dass die Gesamtschwerpunkthöhe der Flüssigkeit nach Auslaufen einer kleinen Δh entsprechenden Wassermenge tatsächlich tiefer liegen muss als es Gl. (8) angibt. Diese Gleichung für die neue Schwerpunkthöhe (nach Auslaufen einer Δh entsprechenden Wassermenge) stellt damit in der Veröffentlichung von Malcherek nach Ansicht der Verfasser die fehlerhafte Annahme dar.

Um die fehlerhafte Annahme zu korrigieren, ist die folgende Ergänzung bzw. Anpassung der Schwerpunktlage erforderlich. Nach den Grundlagen der Mechanik berechnet sich die Schwerpunktlage s_y von zwei beliebigen Massen m_1 und m_2 mit beliebigen Schwerpunkthöhen s_1 und s_2 wie folgt:

$$s_{y,ges} = \frac{m_1 \cdot s_{y,1} + m_2 \cdot s_{y,2}}{m_1 + m_2}$$

Setzt man also für m_1 die Masse des im Behälter befindlichen Wassers und für m_2 die Masse des ausgelaufenen Wassers ein. Mit den zugehörigen Teilschwerpunkthöhen s_1 und s_2 ergibt das:

$$\begin{aligned} s_{y,ges} &= \frac{A_0 \cdot \rho \cdot (h - \Delta h) \cdot \frac{1}{2} \cdot (h - \Delta h) + A_0 \cdot \rho \cdot \Delta h \cdot 0}{A_0 \cdot \rho \cdot (h - \Delta h) + A_0 \cdot \rho \cdot \Delta h} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (h - \Delta h)^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}(h^2 - 2 \cdot h \cdot \Delta h + \Delta h^2)}{h} \end{aligned}$$

Für sehr kleine Δh gilt deshalb:

$$s_{y,ges} \approx \frac{1}{2}h - \Delta h = \frac{1}{2} \cdot (h - 2 \cdot \Delta h)$$

Der Vergleich der neu berechneten Gesamtschwerpunkthöhe mit der von Malcherek verwendeten Gl. (8) zeigt, dass die Schwerpunkthöhenverschiebung nach Ausfluss einer sehr kleinen Δh entsprechenden Wassermenge tatsächlich doppelt so groß ist (Δh zu $\Delta h/2$). Dementsprechend müssen die Änderung der Lageenergie dE_p und die von der Flüssigkeitssäule beim Absinken verrichtete Arbeit dW aus Gl. (6) betragsmäßig genau doppelt so groß sein!

Setzt man die um den Faktor 2 korrigierten Terme in Gl. (6) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) - 2 \cdot g \cdot h &= -g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) &= 2 \cdot g \cdot h - g \cdot h + g \cdot h \cdot \frac{A_A}{A_0} \\ v_A^2 \cdot \left(1 - \frac{A_A^2}{A_0^2}\right) &= 2 \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{A_A}{A_0}\right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(1 + \frac{A_A}{A_0}\right)}}$$

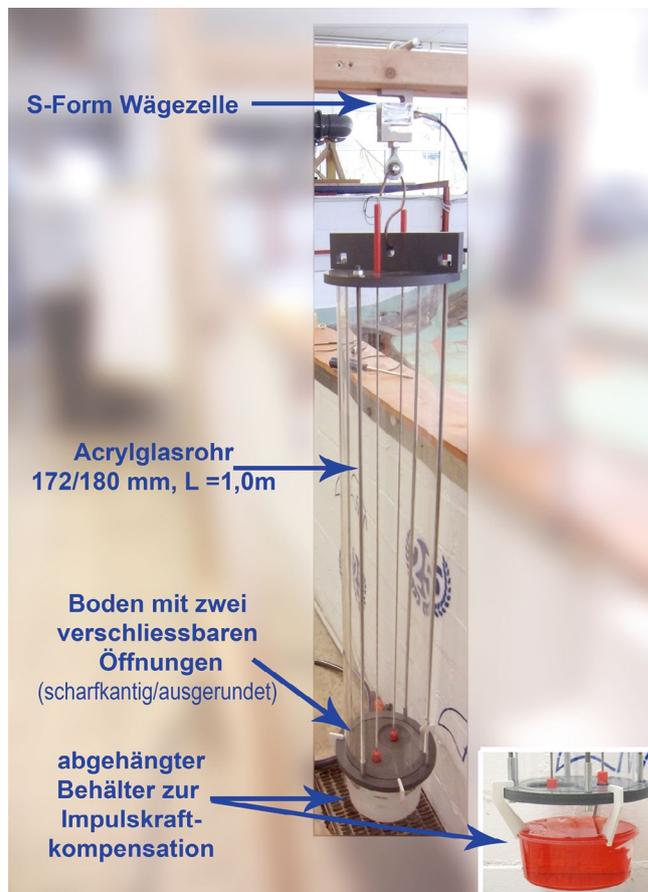


Bild 4: Versuchsaufbau für die indirekte Messung der Ausflussgeschwindigkeit verschiedener Öffnungsformen (scharfkantig/ausgerundet) mittels Massenermittlung durch Wägezelle

Damit kann festgestellt werden: Torricelli hat doch Recht!

Der verwendete Ursprungsterm für Gl. (8) (entspricht Gl. (23) in Malcherek [3]):

$$h_{s,e} = \frac{1}{2} \cdot (h - \cdot h) - \frac{A_0}{A_A} \cdot \frac{\Delta h^2}{2h}$$

ist offenbar unzulässig vereinfacht worden; denn der zweite Term der Gleichung wurde wegen $\Delta h^2 \approx 0$ nicht berücksichtigt, dem steht allerdings entgegen, dass der Grenzwert A_0/A_A für sehr kleine A_A unendlich groß ist! Mit dem Modellansatz des seitlichen Ausflusses kann diese unzulässige Vereinfachung von Malcherek [3] nachgewiesen und der Originalansatz von Torricelli bestätigt werden.

3 Modellversuche zum Nachweis des Torricelli-Ansatzes

3.1 Versuchsbeschreibung Ausfluss aus kleinen kreisförmigen Öffnungen

Um die theoretischen Ausflussgeschwindigkeiten (bzw. die Literaturangaben für Ausflussbeiwerte μ von kleinen kreisförmigen

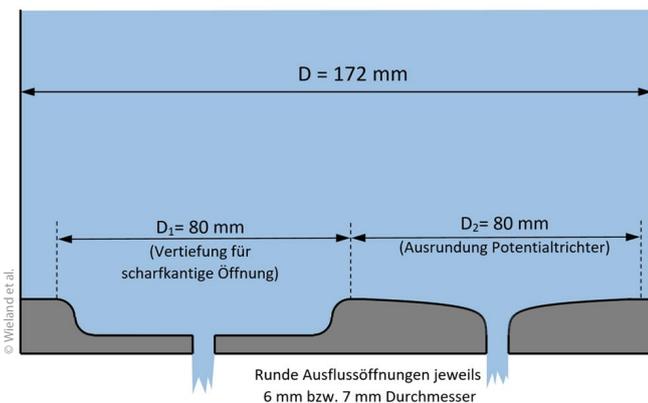


Bild 5: oben: Foto einer der beiden CNC-gefrästen Bodenplatten (PVC-U-Kunststoff); unten: Querschnitt-Skizze mittig durch beide Auslassöffnungen

Öffnungen) verifizieren zu können, wurde der in **Bild 4** dargestellte Versuchsaufbau im Wasserbaulabor des Forschungsinstituts Wasser und Umwelt (fwu) an der Universität Siegen hergestellt und für verschiedene Messungen verwendet.

Der Acrylglaszylinder befindet sich mittels Hakenverbindung freihängend unter der in **Bild 4** erkennbaren Wägezelle. Diese wird über einen Messverstärker Typ HX711 an einem Mikrocontroller Arduino Nano ausgelesen (Samplefrequenz etwa 80 Hz). Die verwendete S-Form-Wägezelle mit 50 kg Messbereich wurde zuvor mit verschiedenen Gewichten im Vergleich zu einer geeichten Laborwaage (Fabrikat Kern) kalibriert, so dass eine ausreichende Linearität und Wiederholbarkeit (im Bereich von schätzungsweise ± 5 g) gewährleistet ist. Um eine eventuelle Beeinflussung durch die stetig abnehmende Impulskraftwirkung des austretenden Wassers zu kompensieren, ist unter dem Versuchszylinder zusätzlich eine wassergefüllte Auffangschale abgehängt, die als Tosbecken für den eintretenden Wasserstrahl dient. Die Startmasse im frei hängenden Acrylglasrohr beträgt $m_s = 22\,740$ g.

Durch Herausziehen des an einer M3-Gewindestange befestigten Verschlussstopfens kann jeweils eine der beiden Ausflussöffnungen im Boden freigegeben werden. **Bild 5** zeigt im Detail die Anordnung der Öffnungen im Boden des Zylinderrohres. Der zylindrische Teil der Bodenöffnungen ist für eine bessere Vergleichbarkeit sowohl bei dem scharfkantigen Loch als auch bei dem ausgerundeten Loch $s = 5$ mm hoch. Verwendet wurden zwei verschiedene Varianten der Bodenplatte mit 6,0 mm und 7,0 mm Öffnungsdurchmesser. Die durch die Wägezelle kontinuierlich gemessene Restwassermasse im Zylinder ist dabei direkt proportional zur Wasserspiegelhöhe im Zylinder mit $D = 172$ mm Innendurchmesser.

3.2 Messungen Ausfluss aus kleinen kreisförmigen Öffnungen

Die Messungen der Ausflusszeiten wurden für jede Öffnungsgröße und Form mehrfach wiederholt, die Ergebnisse sind in den **Bildern 6** und **7** beispielhaft grafisch dargestellt. Verwendet wurden hierfür Datensätze mit fliegendem Start ab einer Unterschreitung der Wassermasse im Zylinder $m(t) < 22\,000$ g. Der Bezugshorizont der Versuche ist die Unterkante der Bodenplatte. Die zugehörigen Ausflussbeiwerte μ ergeben sich aus folgendem Zusammenhang:

$$Q_{real} = \mu \cdot Q_{ideal} = \mu \cdot A_A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Der Ausfluss Q in den Messungen ergibt sich aus dem Differenzenquotient Volumen pro Zeit:

$$Q = \frac{\text{Ausflussvolumen}}{\text{Zeit}} = \frac{V_2 - V_0}{t_2 - t_0} = \mu \cdot \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0}$$

$(t_1 - t_0)$ ist dabei die gemessene Ausflusszeit, $(t_2 - t_0)$ gibt die theoretische Ausflusszeit an. Da die betrachteten Ausflussvolumina in beiden Fällen identisch sind, ergibt sich durch Umstellen der Ausflussbeiwert:

$$\mu = \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{theoretische Ausflusszeit}}{\text{gemessene Ausflusszeit}}$$

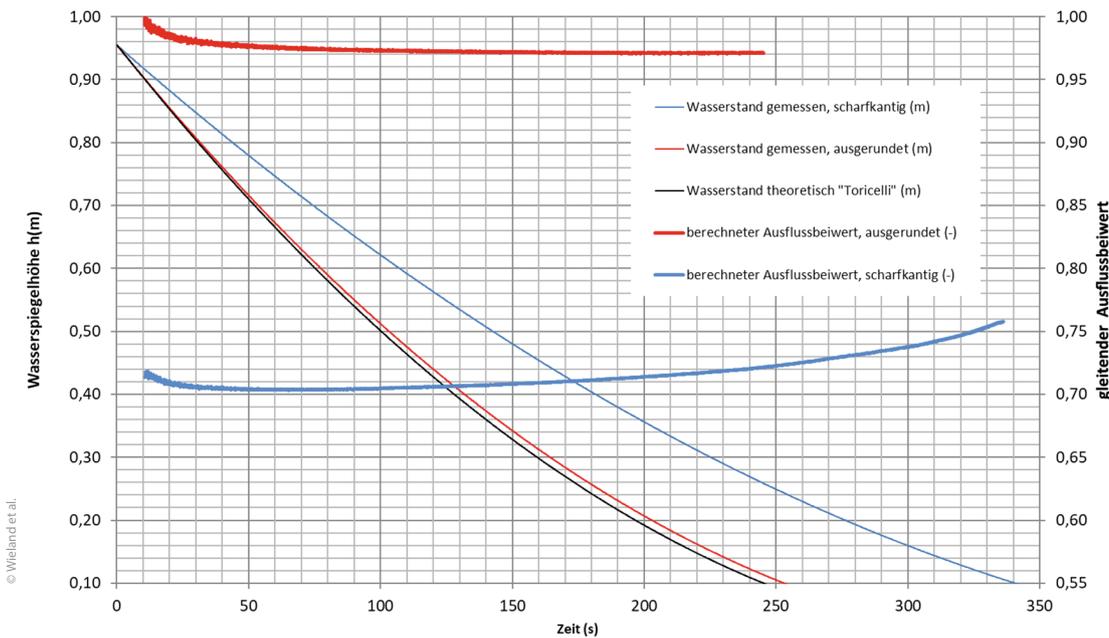


Bild 6: Wasserstand-Zeit-Diagramm für Ausfluss aus 6-mm-Öffnungen

Als Startzeit t_1 wurde das Unterschreiten einer $h_1 = 90$ cm Stauhöhe entsprechenden Wassermasse im Zylinder definiert; das Messende t_0 wurde bei Unterschreiten einer $h_0 = 40$ cm entsprechenden Wassermasse gesetzt. Für die erste Variante mit 6 mm Öffnung konnte so ein Ausflussbeiwert $\mu_{\text{scharf},6\text{mm}} = 0,709$ und ein $\mu_{\text{rund},6\text{mm}} = 0,968$ bestimmt werden. Für die zweite Variante mit 7 mm Öffnung ergibt die Berechnung $\mu_{\text{scharf},7\text{mm}} = 0,687$ und ein $\mu_{\text{rund},7\text{mm}} = 0,972$. Der theoretischen Ausflusszeit für das gleiche Volumen liegt dabei die reibungsfreie Torricelli-Ausflussgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ zugrunde.

Die mit Hilfe des Versuchsaufbaus ermittelten Ausfluss-Beiwerte μ liegen erwartungsgemäß dicht bei den zugehörigen Literaturangaben, z. B. in Aigner et al. [2]. Hier ist für ausgerundete Öffnungen der Bereich $0,96 < \mu < 0,98$ und für scharfkantige Öffnungen (je nach Länge des zylindrischen Teilabschnitts unterhalb der scharfen Kante) der Bereich $0,65 < \mu < 0,82$ angegeben. Zusätzlich wurden in den Bildern 6 und 7 die gleitenden Ausflussbeiwerte mit einer Startzeit bei Unterschreiten des Startwasserstandes $h_1 = 90$ cm und variablem Stop-Wasserstand h_0 in 0,1 cm Schritten berechnet. Es ist erkennbar, dass die Ausflussbeiwerte für die scharfkantigen Öffnungen nicht konstant

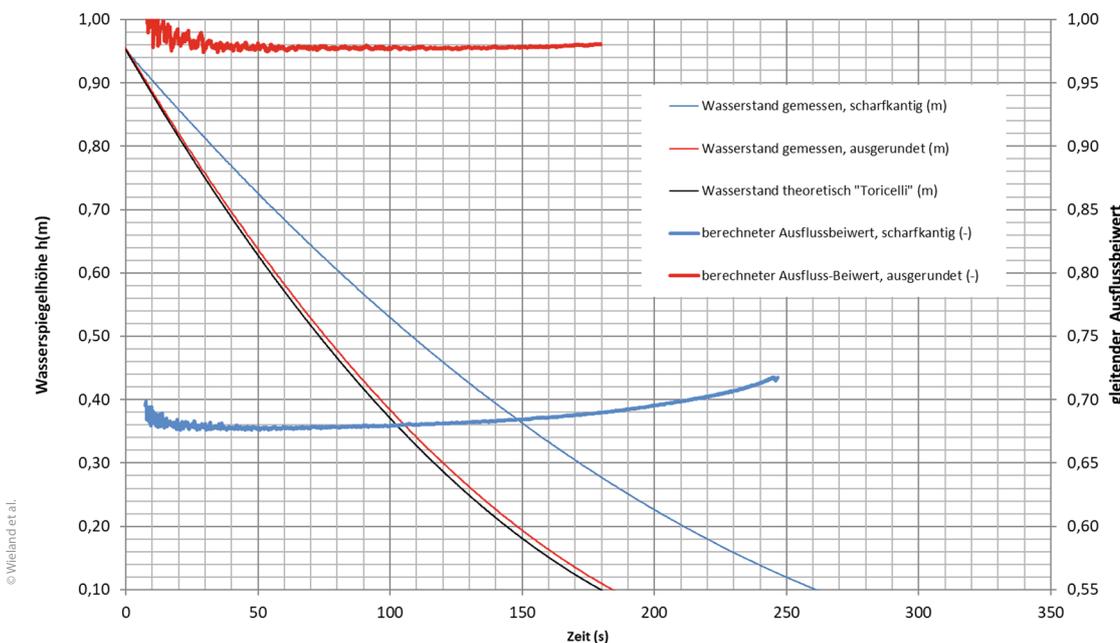


Bild 7: Wasserstand-Zeit-Diagramm für Ausfluss aus 7-mm-Öffnungen

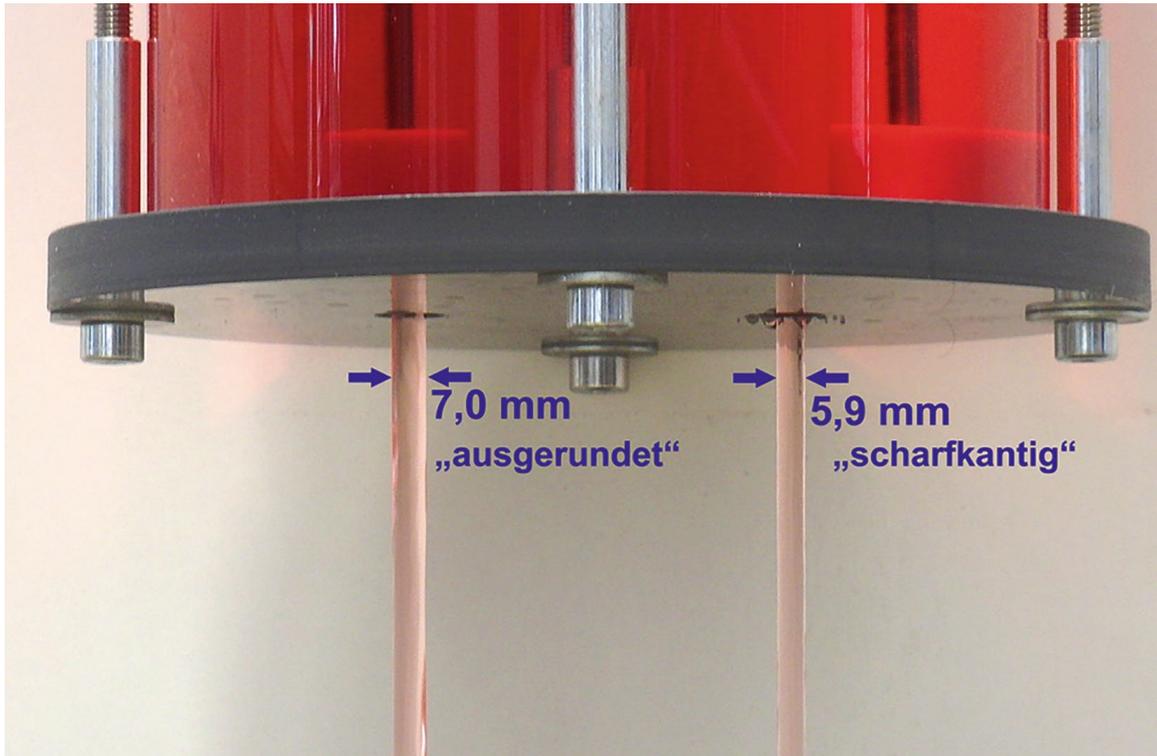


Bild 8: Seitenansicht des gleichzeitigen Ausflusses aus scharfkantiger und ausgerundeter Öffnung

über die Messzeit sind. Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist hier eine Abhängigkeit von der Reynoldszahl im Ausflussquerschnitt vorhanden. Dieser Sachverhalt wird hier nicht weiter betrachtet, bietet aber Potenzial für zukünftige Untersuchungen.

Sehr interessant ist der folgende Aspekt, der sich auch anhand der Ausfluss-Versuche feststellen lässt: **Bild 8** zeigt eine Seitenansicht des gleichzeitigen Ausflusses aus der scharfkantigen und der ausgerundeten 7-mm-Ausflussöffnung (rot eingefärbtes Wasser für besseren Kontrast). Es ist zu erkennen, dass der Wasserstrahl aus der scharfkantigen Öffnung - im Vergleich zur ausgerundeten Öffnung - deutlich dünner erscheint. Aus der Vermessung der Wasserstrahl-Durchmesser im Foto mit Hilfe eines Bildbearbeitungsprogramms ergibt sich ein ungefähres Durchmesser-Verhältnis von:

$$\frac{D_{\text{scharfkantig}}}{D_{\text{ausgerundet}}} = \frac{5,9 \text{ mm}}{7,0 \text{ mm}} = 0,843$$

Daraus ergibt sich ein zugehöriges Strahl-Querschnittsflächenverhältnis von:

$$\frac{A_{\text{scharfkantig}}}{A_{\text{ausgerundet}}} = \frac{\frac{D_s^2}{4} \cdot \pi}{\frac{D_a^2}{4} \cdot \pi} = \frac{5,9^2}{7,0^2} = 0,711$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $Q = v \cdot A$ folgt, dass der messbare Unterschied der Volumenströme aus beiden Öffnungen (mit dem Differenzfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$) in erster Linie aus der Verminderung des Abflussquerschnittes (durch die Einschnürung an der scharfkantigen Öffnung) und nicht aus unterschiedlichen Fließ-

geschwindigkeiten v resultiert. Oder andersherum: Wäre die Fließgeschwindigkeit aus der scharfkantigen Öffnung tatsächlich um den Faktor 0,7 kleiner als bei der ausgerundeten Öffnung, müsste der Querschnitt beider Wasserstrahlen gleich sein. Dementsprechend kann auch mit den vorgestellten Messungen festgestellt werden: Torricelli hat doch recht!

Autoren

Dipl.-Ing. (FH) Jörg Wieland

Leon Jänicke, M. Sc.

Prof. Dr. Jürgen Jensen

Forschungsinstitut Wasser und Umwelt (fwu)

Hydromechanik und Wasserbau

Universität Siegen

Paul-Bonatz-Straße 9-11

57076 Siegen

joerg.wieland@uni-siegen.de

leon.jaenicke@uni-siegen.de

juergen.jensen@uni-siegen.de

Literatur

- [1] Aigner, D.; Valentin, F.: Diskussionsbeitrag zum Fachaufsatz „Die irrtümliche Herleitung der Torricelli-Formel aus der Bernoulli-Gleichung“ In: WasserWirtschaft 106 (2016), Heft 7-8.
- [2] Aigner, D.; G. Bollrich: Handbuch der Hydraulik - für Wasserbau und Wasserwirtschaft. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2015.
- [3] Malcherek, A.: Die irrtümliche Herleitung der Torricelli-Formel aus der Bernoulli-Gleichung. In: WasserWirtschaft 106 (2016), Heft 2-3.
- [4] Schröder, R. C. M. et al.: Technische Hydraulik, Kompendium für den Wasserbau. 2.A. Heidelberg: Springer Verlag, 2003.