Vorlesung
Hydrologische Modellierung
Modellierung der Infiltration

Masters Modul M_VW3

Einleitung

- Die Infiltration ist der Prozess der Versickerung von Wasser im ungesättigten Boden.
- Die Infiltration ist bestimmend für das Niederschlag-Abflussverhalten eines Einzugsgebietes
- Der Infiltrationsprozess ist verantwortlich für den Typ von Abflussprozess, der in einem Gebiet vorzufinden ist.
- Der Infiltrationsprozess bestimmt die Zeitverzögerung zwischen Niederschlag und Grundwasserneubildung.
- Die Infiltration wird durch das Darcy´sche Gesetz der ungesättigten Zone beschrieben.
- Vereinfachte analytische Lösungen der Richards-Gleichung führen zu verschiedenen Ausdrücken zur Ermittlung der Infiltration.

Eigenschaften des Oberflächenabflusses

Horton'scher Oberflächenabfluss

- Niederschlag überstiegt die Infiltrationskapazität.
- typisch in ariden Klimazonen.
- Gebiete mit niedriger Bodendurchlässigkeit (e.g. städtische Gebiete).
- kann überall im Einzugsgebiet stattfinden.
- sehr aggressiv und zerstörerisch.
- bei geringer Intensität normale Infiltration in ungesättigten Boden.

Gesättigten Oberflächenabfluss

- tritt in den unteren Einzugsgebietsflächen auf.
- kein abrupter, sondern stetiger Prozess.
- nicht sehr aggressiv im Vergleich zum Horton'schen Prozess.
- Sättigung ereignet sich von unteren Bodenschichten nach oben.
- Große Wasservolumen.

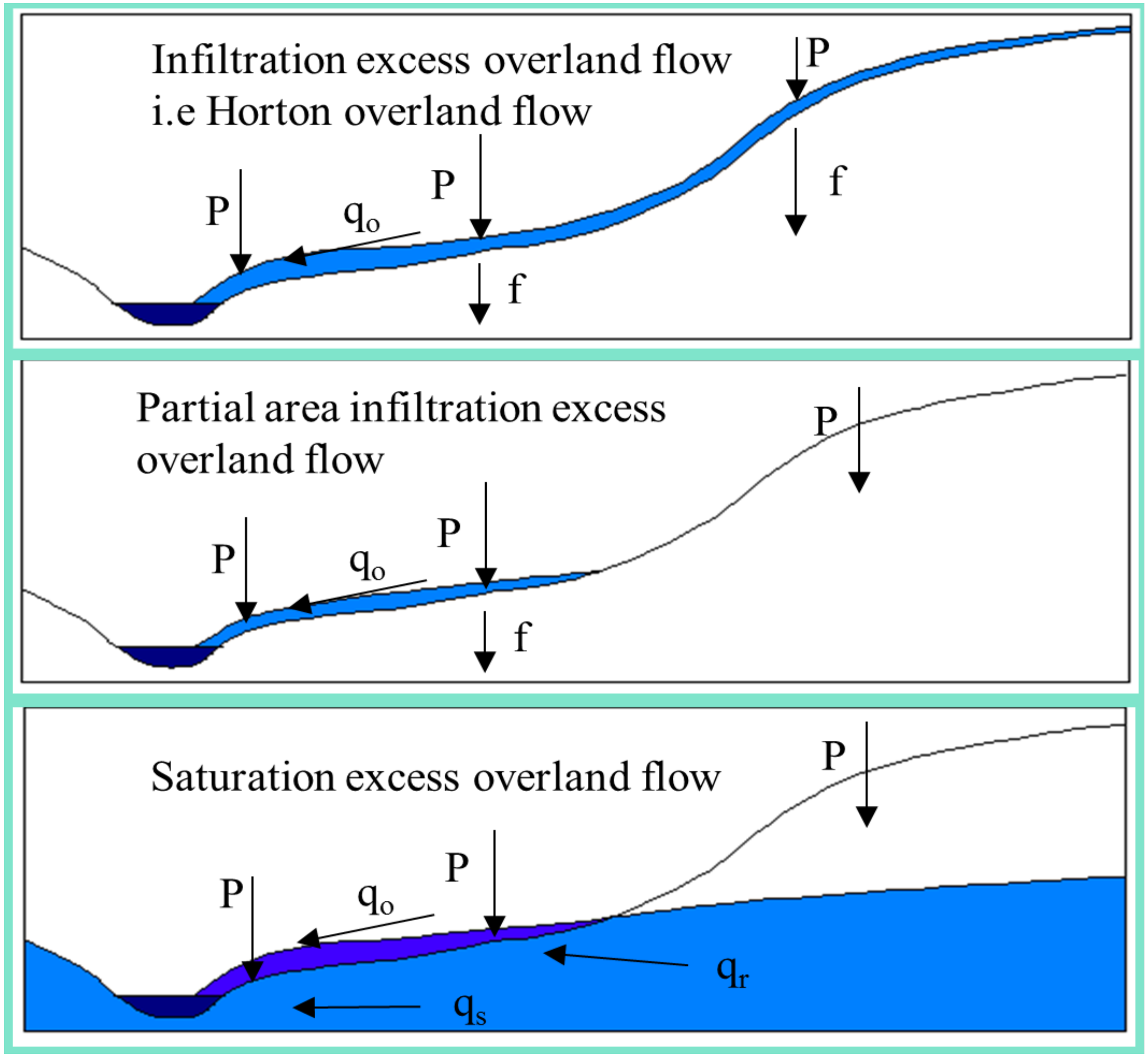
Typen von Oberflächenabfluss

Horton`scher Oberflächenabfluss
in aridem Klima

Gesättigter Oberflächenabfluss an
einer Hanglage in feuchtem Klima

Oberflächliche Abflussprozesse

Typische Abflussprozesse an einem Hang werden durch die Infiltrationskapazität des Bodens und die Position des Grundwasserspiegel relative zur Oberfläche bestimmt.

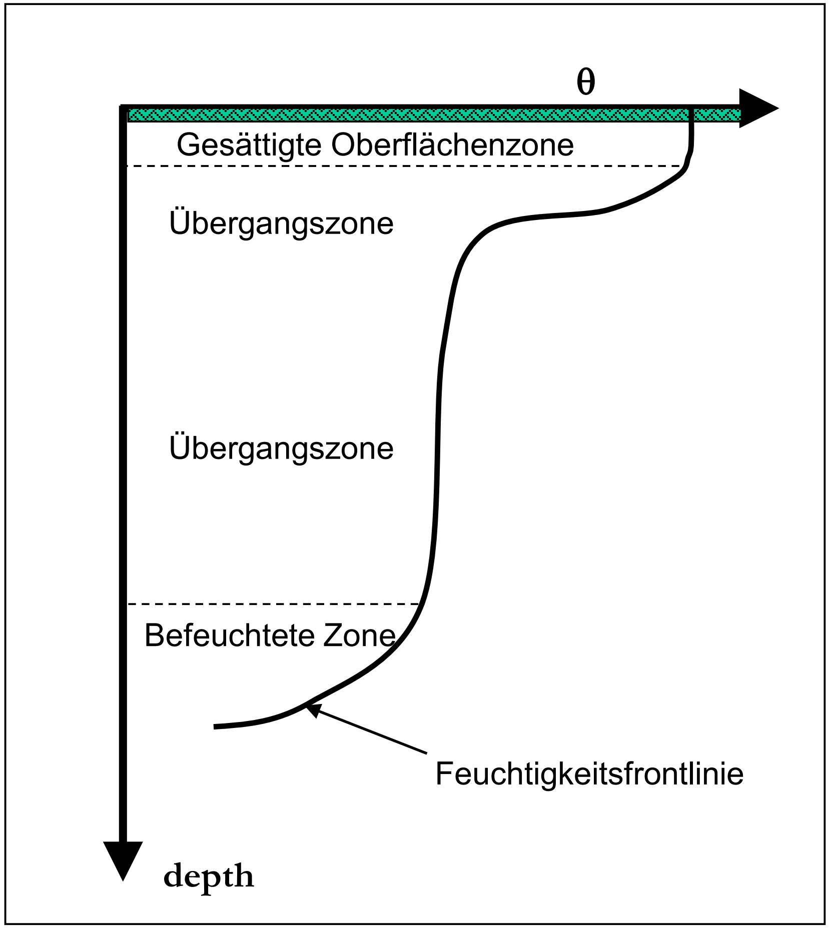


Infiltration in ungesättigtem Boden

- Im Falle eines Niederschlags auf einen ungesättigten Boden, dringt die Feuchte vertikal in die Bodensäule ein.
- Das Eindringen der Feuchte wird räumlich eindimensional beschrieben und erfolgt in die Richtung einer senkrecht in den Boden gerichteten Koordinate *z*.
- Die Infiltrationskapazität wird als die maximale mögliche Infiltrationsrate, die durch Gravität und Kapillarwirkung in eine ungesättigte Bodensäule der Flache $1 m^2$ möglich ist, definiert.
- Die Infiltrationskapazität wird meist in der Einheit *mm/h oder*

  cm/h ausgedrückt.
- Dadurch ist sie direkt mit der Niederschlagsintensität und der Verdunstung, die beide gewöhnlich in *mm/h* ausgedrückt werden, vergleichbar.

Der Infiltrationsprozess



Quelle: D.R. Maidment, U.Texas

Faktoren die die Infiltration beeinflussen sind:

- Bedingungen an der Erdoberfläche,
- Dichte des Pflanzenbewuchses,
- Eigenschaften des Bodens,
- Hydraulische Leitfähigkeit, vorhandener Feuchtegehalt

Man unterschiedet 4 räumliche Zonen im Infiltrationsprozess:

1. Gesättigte Oberflächenzone,
2. Übergangszone,
3. Zone unter Befeuchtung,
4. Feuchtigkeitsfrontlinie

Infiltration: Definitionen

- Die Infiltrationsrate *f(t):*

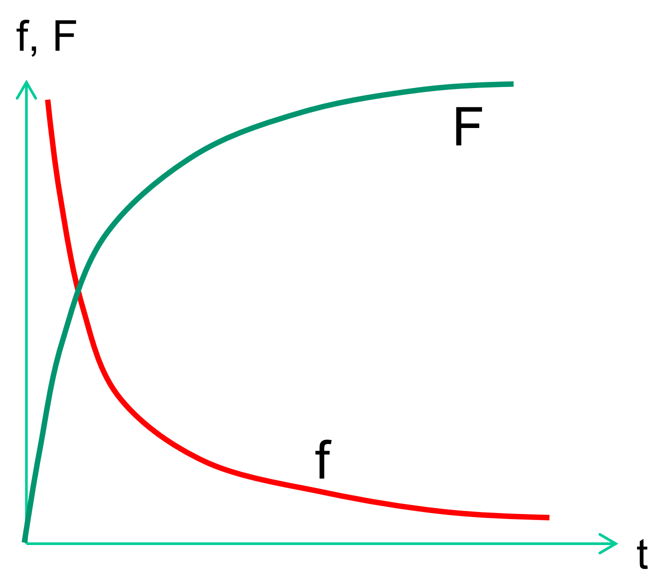
  Rate mit der Wasser an der Bodenoberfläche versickert (*mm/h* bzw. *cm/h*)

- Akkumulierte Infiltration bzw. Infiltriertes Volumen *F(t):*

  Das gesamte Volumen das zu einem Zeitpunkt t im Boden versickert ist:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$



fwu Quelle: D.R. Maidment, U.Texas

Infiltration: Experimentelle Bemessung

Ringinfiltrometer

Doppelringinfiltrometer

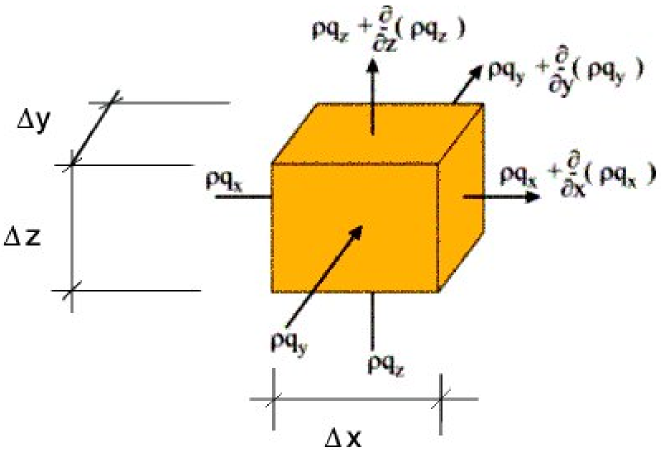
Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Infiltrometer

Die Richards-Gleichung

$$\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+1\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial}{\partial z}(\psi+z)\right]$$

- ψ : Matrixpotential
- θ : Bodenfeuchtegehalt.
- *z*: vertikale Koordinate, abwärts gerichtet
- *K*: hydraulische Leitfähigkiet für ungsättigte Böden (abhängig von ψ).
- Die Richards-Gleichung wird von der Massenbilanz eines infinitesimalen Kubus abgeleitet:

$$q=-K(\psi)\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial z}$$



Brooks-Corey Beziehungen

- Empirische Beziehungen werden gebraucht um die hydraulische Leitfähigkeit und Druck unter ungesättigten Bedingungen darzustellen, i.e. $\theta_r < \theta < \theta_s$.

$$K(\theta) = K_{sat}\left(\frac{h_b}{h}\right)^{\eta}; \mathrm{h} > h_b$$

$$K(\theta) = K_{sat}; \mathrm{h} \le h_b$$

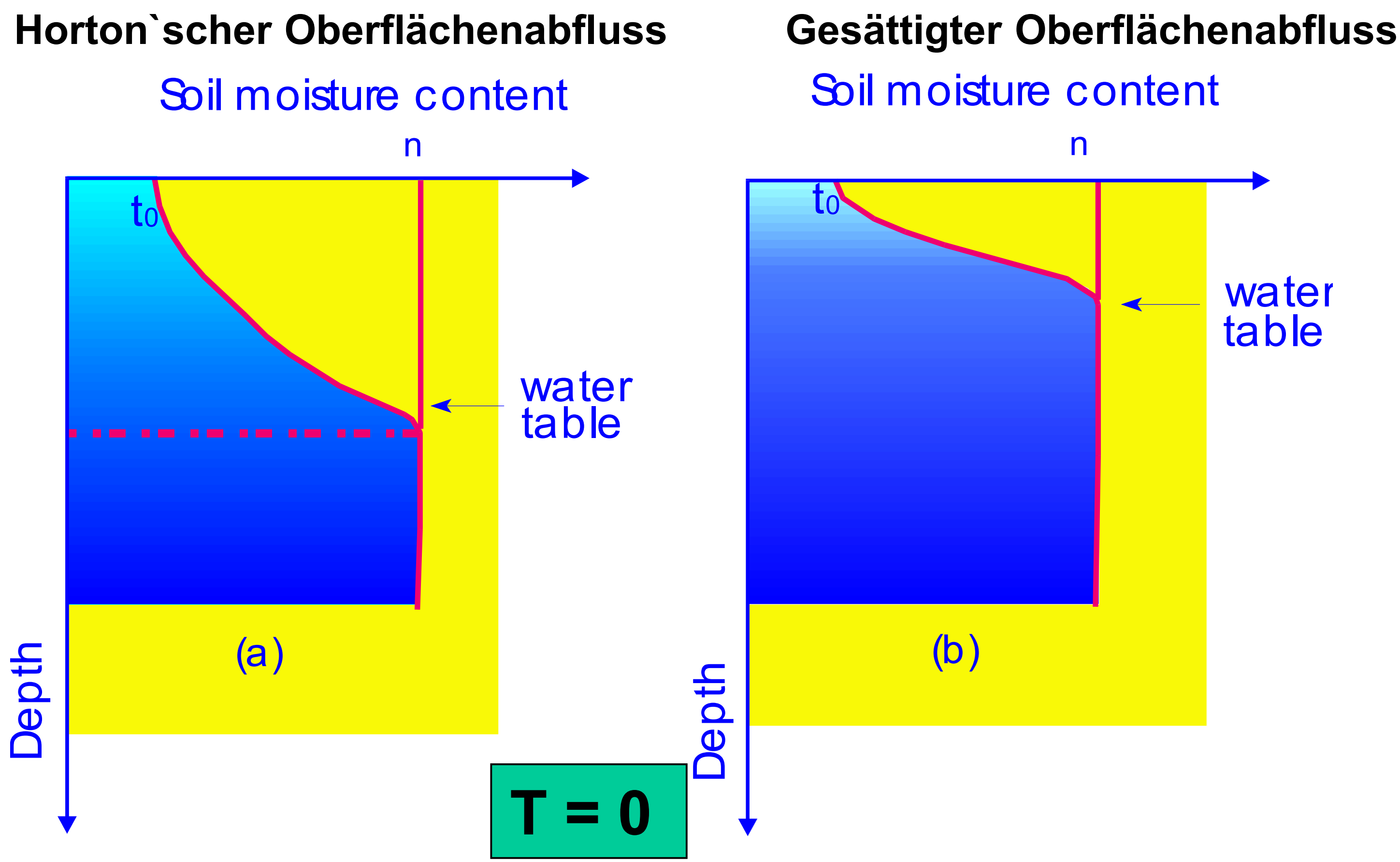
hydraulische Leitfähigkeit für ungesättigte Böden (Brooks-Corey-Burdine).

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{h_b}{h}\right)^{\lambda}$$

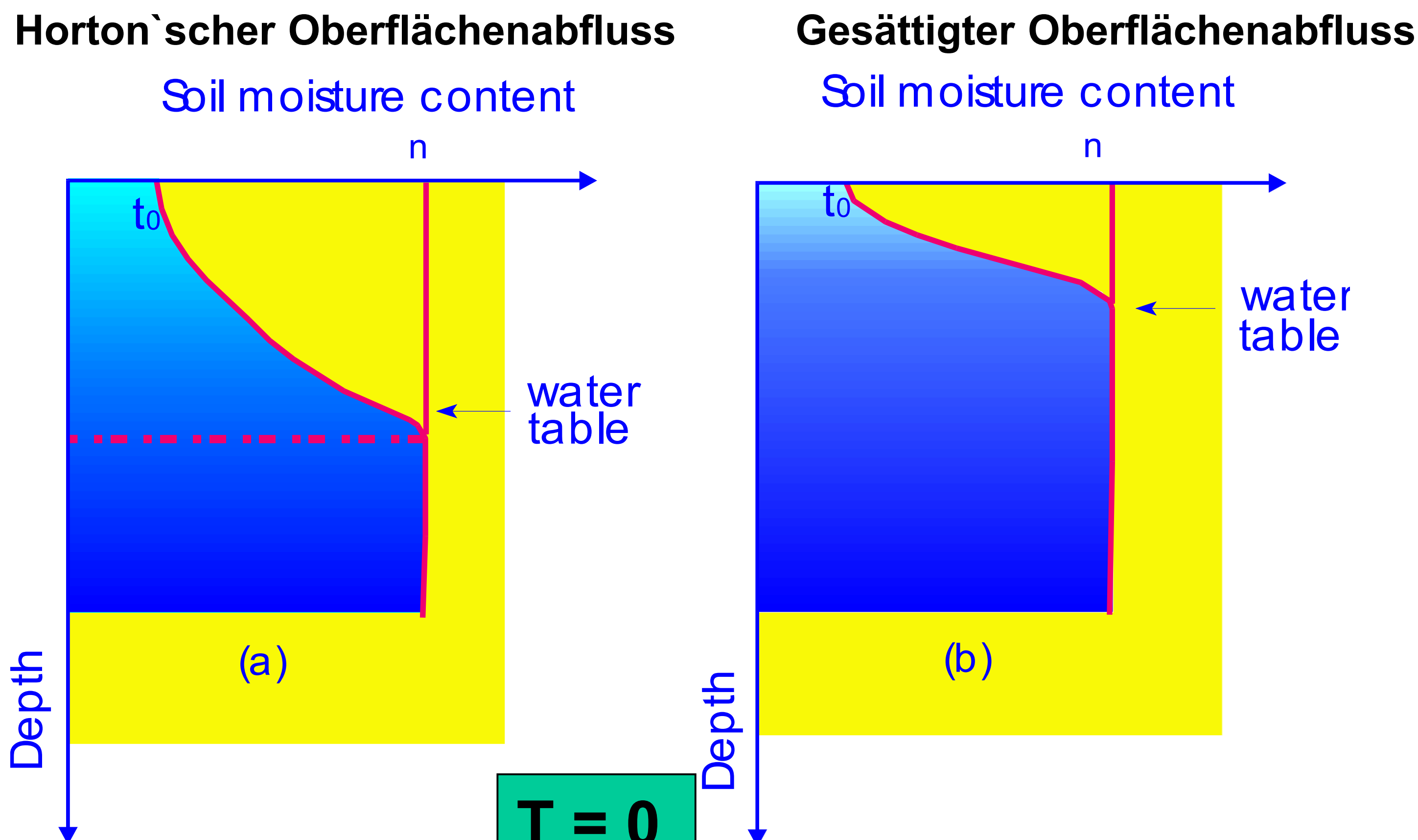
Brooks-Corey Beziehung zur Bestimmung des Matrixpotential.

- Die Größen $\theta_r, \mathrm{h}_b, \eta, \lambda$ sind Parameter der Brook-Corey Beziehung die empirisch ermittelt werden.
- *h* wird oft als alternative Bezeichnung für *ψ* angewandt.

Vertikales Profil der Bodenfeuchte

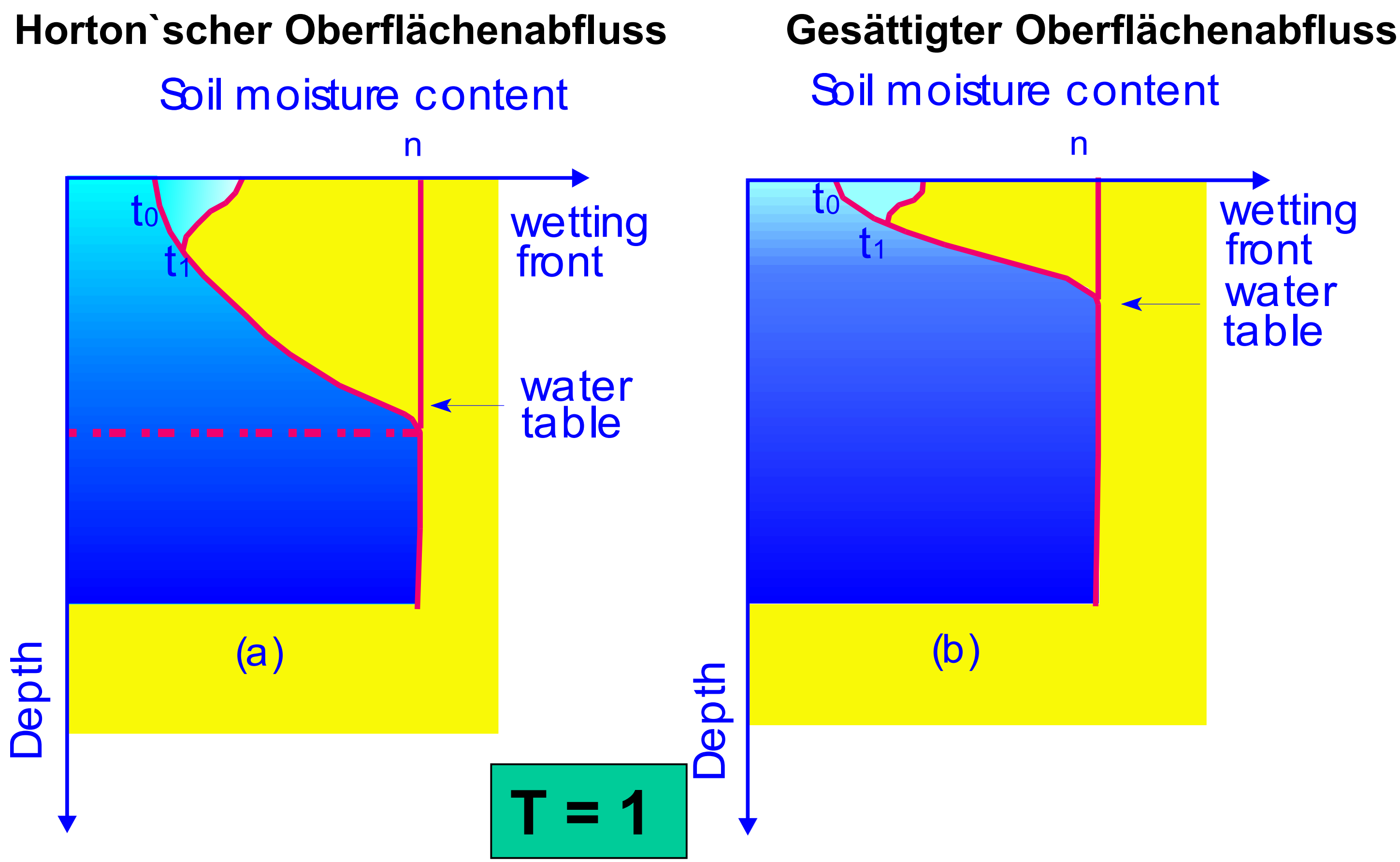


Vertikales Profil der Bodenfeuchte

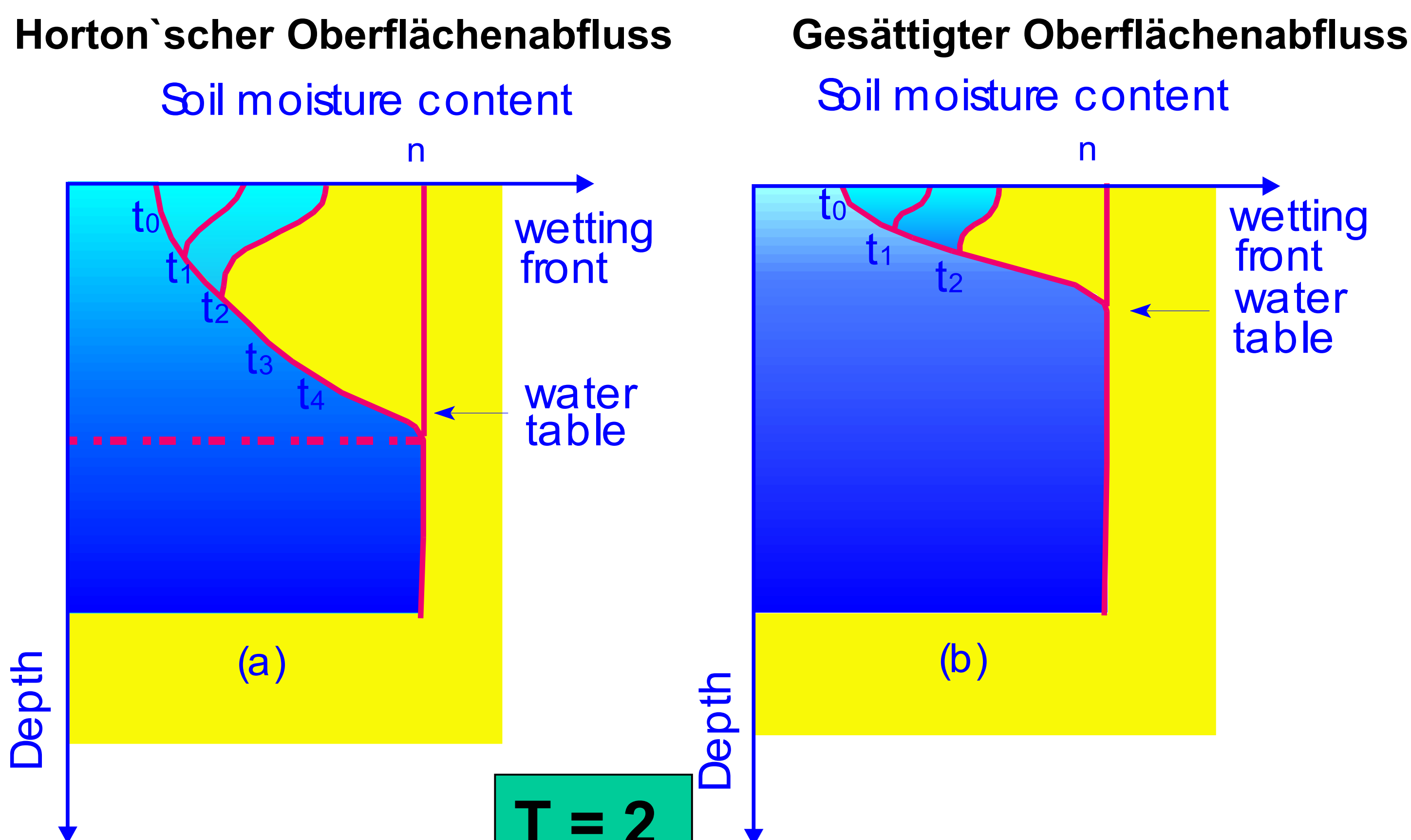


T = 0

Vertikales Profil der Bodenfeuchte

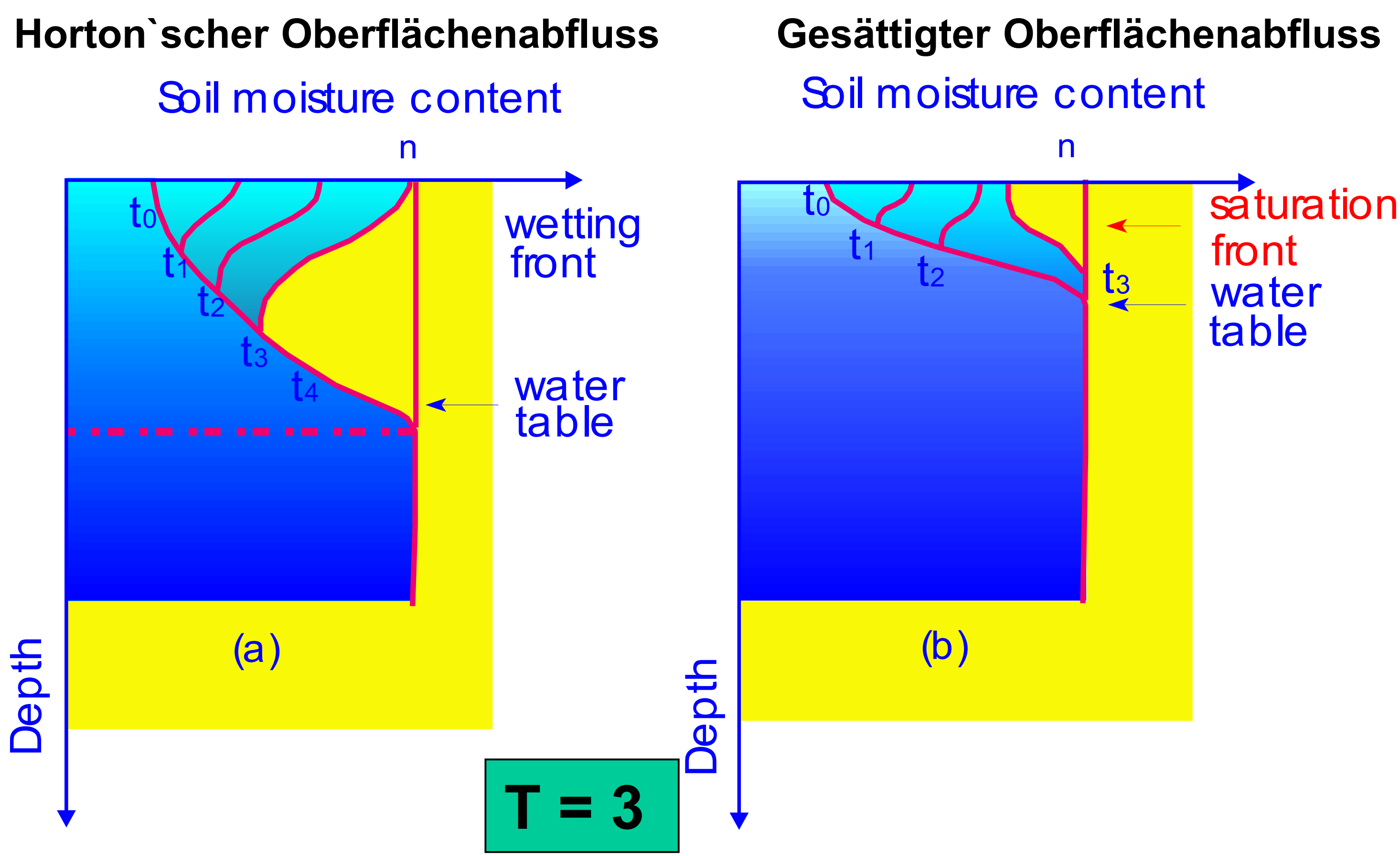


Vertikales Profil der Bodenfeuchte



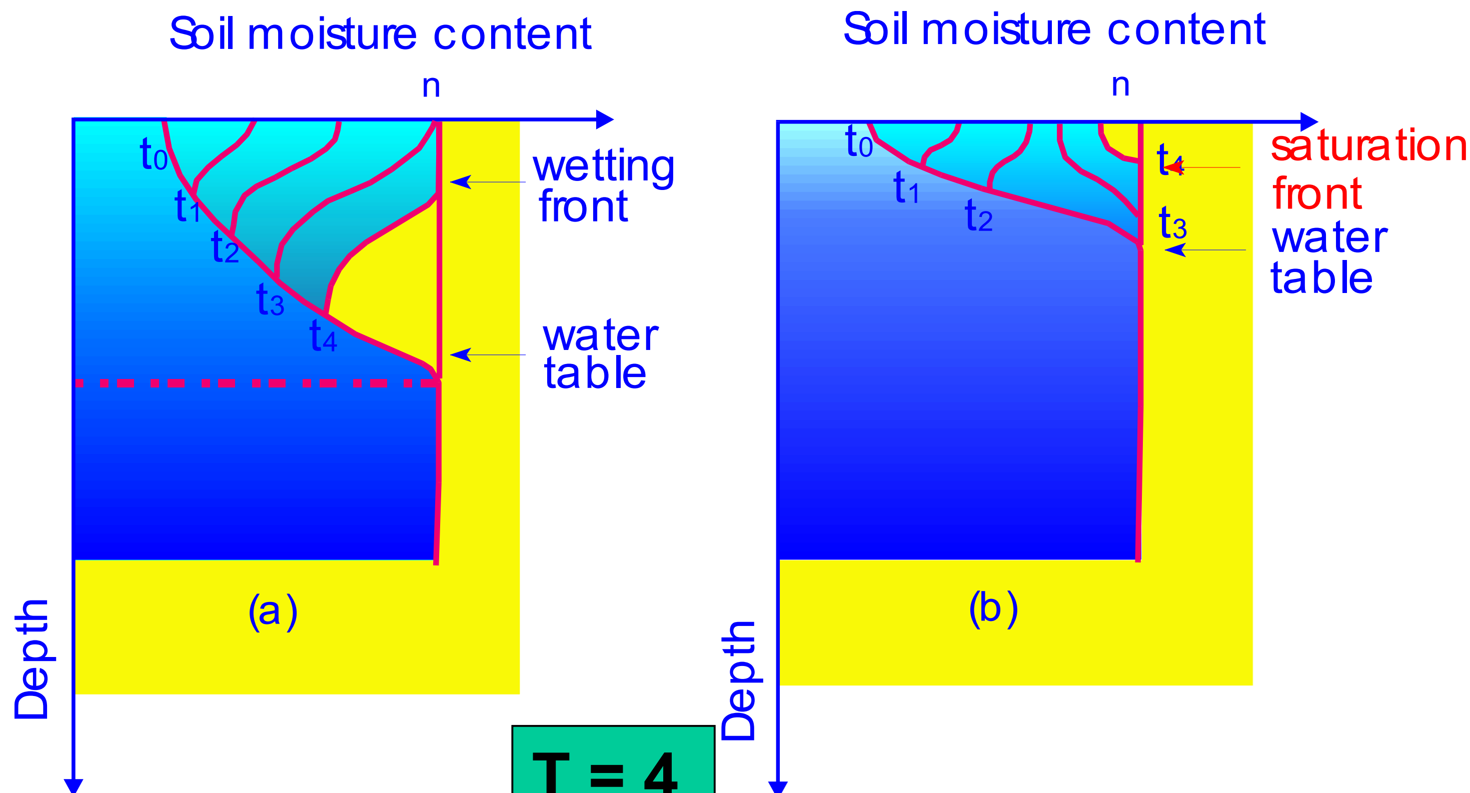
T = 2

Vertikales Profil der Bodenfeuchte



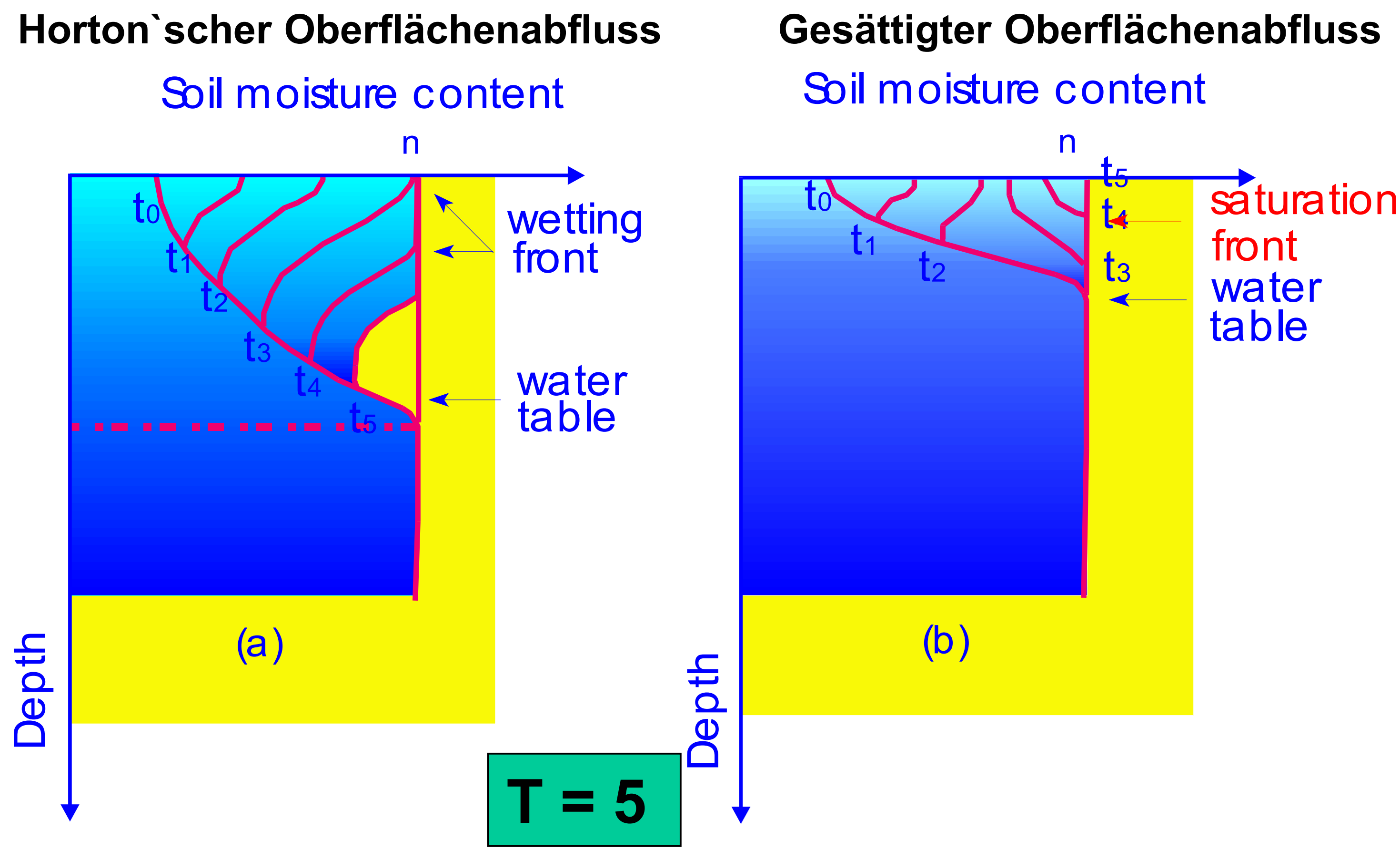
Vertikales Profil der Bodenfeuchte

Horton`scher Oberflächenabfluss **Gesättigter Oberflächenabfluss**

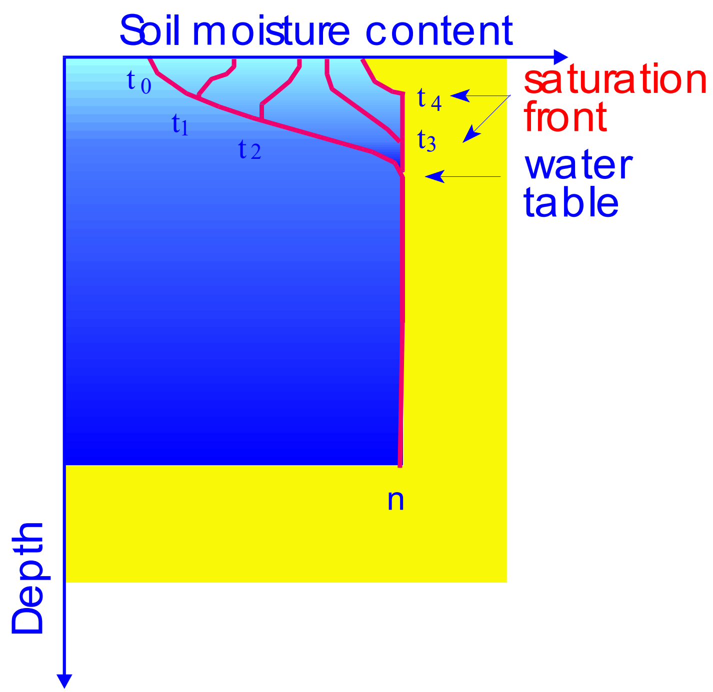


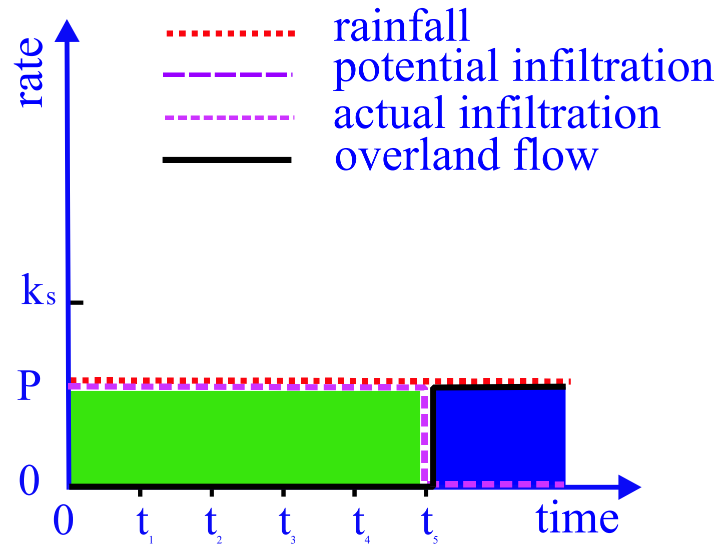
T = 4

Vertikales Profil der Bodenfeuchte



Abfluss durch gesättigten Oberflächenprozess

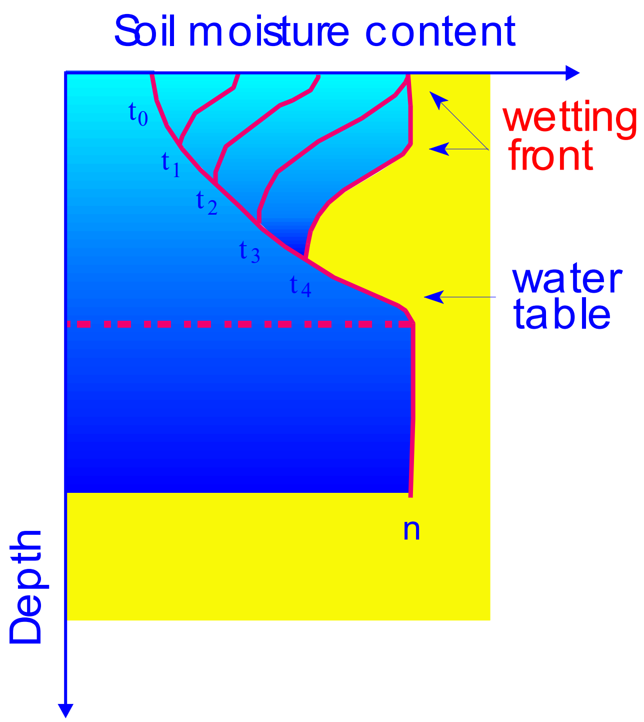


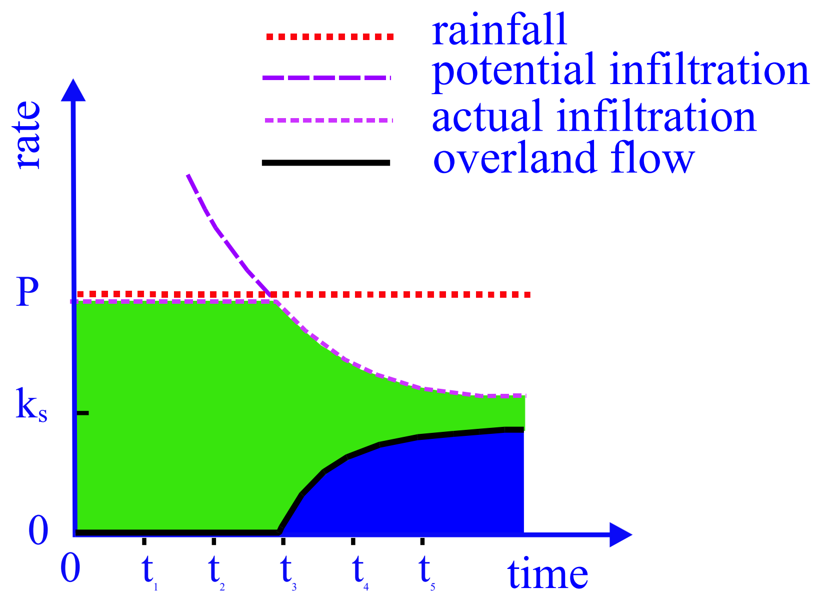


P = rainfall rate

K_s = saturated hydraulic conductivity

Abfluss durch Horton´schen Prozess





P = rainfall rate

K_s = saturated hydraulic conductivity

Infiltrationsmodelle

- Es gibt in der Literatur verschiedene Infiltrationsmodelle. Die bekanntesten sind:
- Das Horton‘sche Modell
- Das Green-Ampt Modell
- Gleichung nach Philip

- Das Horton‘sche Modell und die Gleichung nach Philip wurden als angenäherte Lösungen der exakten Theorie, die der Richards-Gleichung zugrunde liegt, abgeleitet.
- Das Green-Ampt Modell wurde als exakte Lösung einer angenäherten Beschreibung des Infiltrationsprozesses abgeleitet (Kolben-Prinzip).

Das Horton´sche Infiltrationsmodell

Das Horton´sche Modell der Infiltration in eine Bodensäule der Fläche 1m² beschreibt die Infiltrationsrate als eine Funktion, die in der Zeit exponentiell abnimmt:

$$f_t = f_c + \left(f_0 - f_c\right) e^{-k\left(t-t_0\right)}$$

f_t : Infiltrationsrate zum Zeitpunkt *t*

f_0 : maximale Infiltrationsrate

f_c : Infiltrationsrate im Gleichgewicht

k : Dämpfungskonstante (wird experimentell ermittelt und hängt von der Art des Bodens ab).

Das totale zum Zeitpunkt *t* infiltrierte Volumen $F(t)$ wird durch das Integral der Infiltrationsrate f_t ermittelt:

$$F(t) = f_c t + \frac{\left(f_0 - f_c\right)}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Ableitung des Horton´schen Modells

- Richards Gleichung wird als Funktion der Diffusivität angeschrieben.
- Es wird angenommen dass K und D konstant sind, keine Funktionen von θ bzw. *z*
- Die Gleichung wird nach der Feuchtediffusion an der Oberfläche gelöst.
- Der Diffusionskoeffizient ist definiert:

$$D(\theta(\mathrm{z},\mathrm{t})) = K\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Diffusivität

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\theta}{\partial z} + K\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

Diffusions-
Gleichung

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$$

Horton´sches Infiltrationsmodell

Das Infiltrationsmodell von Green-Ampt (1)

Das Green-Ampt Modell der Infiltration in eine Bodensäule der Fläche 1 m^2 beschreibt die Infiltrationsrate als eine Funktion, die in der Zeit exponentiell abnimmt:

$$\int_0^{F(t)} \frac{F}{F+\psi\Delta\theta} dF = \int_0^t K dt$$

- ψ : Matrix potential
- θ : Feuchtegehalt
- K : hydraulische Durchlässigkeit
- $F(t)$: das gesamte zum Zeitpunkt *t* in den Boden infiltrierte Wasservolumen

Die Funktion kann analytisch integriert werden und führt zu einem Ausdruck, der die variable $F(t)$ enthält, die ja Gegenstand der Ermittlung ist:

$$F(t) = Kt + \psi\Delta\theta \ln\left[1 + \frac{F(t)}{\psi\Delta\theta}\right]$$

Das Infiltrationsmodell von Green-Ampt (2)

- Dies erfordert eine iterative Annäherung des Wertes von $F(t)$, ausgehend von einem geschätzten Anfangswert $F(t)_0$. Im gängigen Fall wird dieser als der höhere Wert zwischen der Infiltrationsrate durch die Gravität Kt, oder jener durch das Matrixpotential dargestelt:

$$F(t)_0 = \max\left[Kt, \sqrt{2\psi\Delta\theta Kt}\right]$$

- Nach der Ermittlung des Volumens $F(t)$ kann die instantane Infiltrationsrate durch Ableitung des Volumens nach der Zeit ermittelt werden:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = K\left[\frac{\psi\Delta\theta}{F(t)} + 1\right]$$

- Bei der Entwicklung des Green-Ampt Modells wird angenommen, dass sich während des Infiltrationsprozesses kein (oder nur sehr wenig) Wasser auf der Oberfläche staut.
- Dies bedeutet, dass die Infiltrationsrate *f(t)* immer höher oder gleich der Rate des Niederschlags *P(t)* sein muss:

$$f(t) \geq P(t)$$

Hypothesen des Green-Ampt Modells

Quelle: Prof Maidment, Univ. Texas

$\Delta\theta$ = Zunahme der Bodenfeuchte

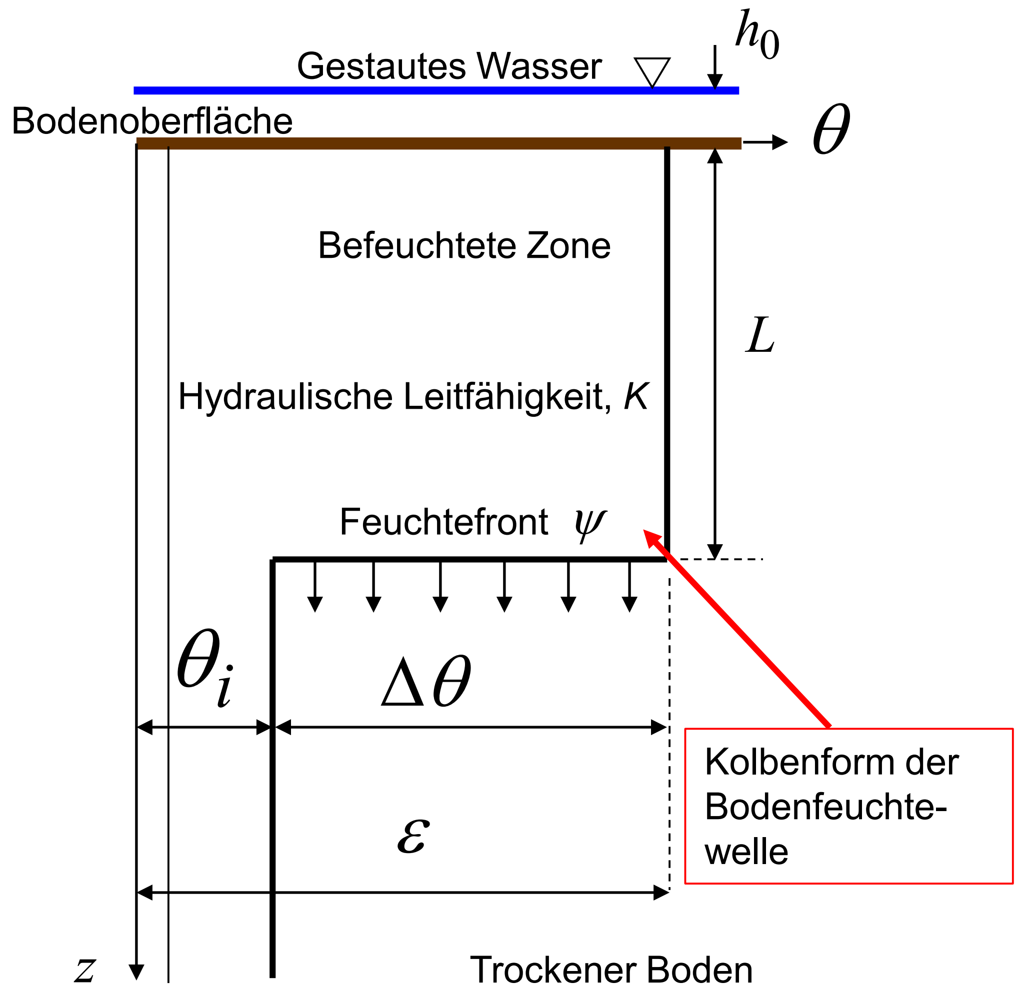
ψ = Matrixpotential (Saugwirkung) an der Übergangszone

L = Befeuchtete Bodentiefe

K = Hydraulische Leitfähigkeit in der feuchten Zone

h_0 = Gestaute Wassertiefe an der Oberfläche (vernachlässigbar)

Die Feuchtigkeitswelle dringt wie ein „Kolben" in den Boden ein (Kolben-Prinzip).



Green-Ampt Modellvariablen

θ = Bodenfeuchte

θ_i = Anfängliche Bodenfeuchte vor Beginn des Infiltrationsprozesses

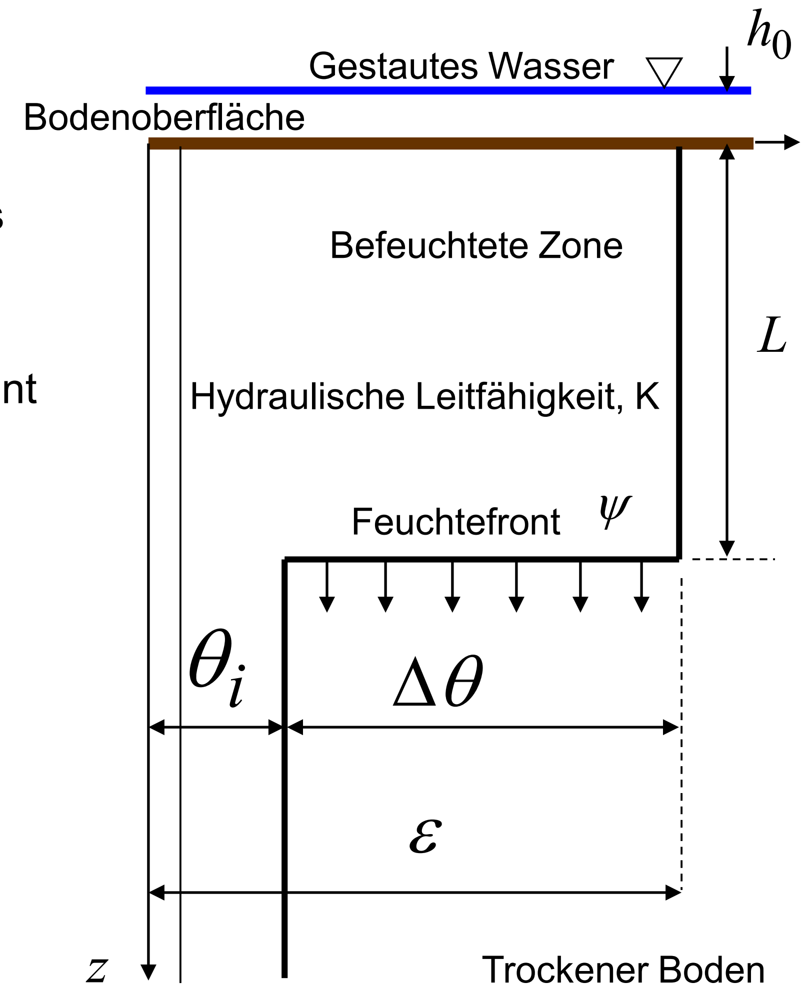
$\Delta\theta$ = Sprunghafte Zunahme der Bodenfeuchte an der Feuchtefront

θ_r = residuale Porosität (auch residuale Feuchte genannt)

θ_e = effektive Porosität

ε = Porosität

$\varepsilon = \theta_r + \theta_e \qquad \varepsilon = \theta_i + \Delta\theta$

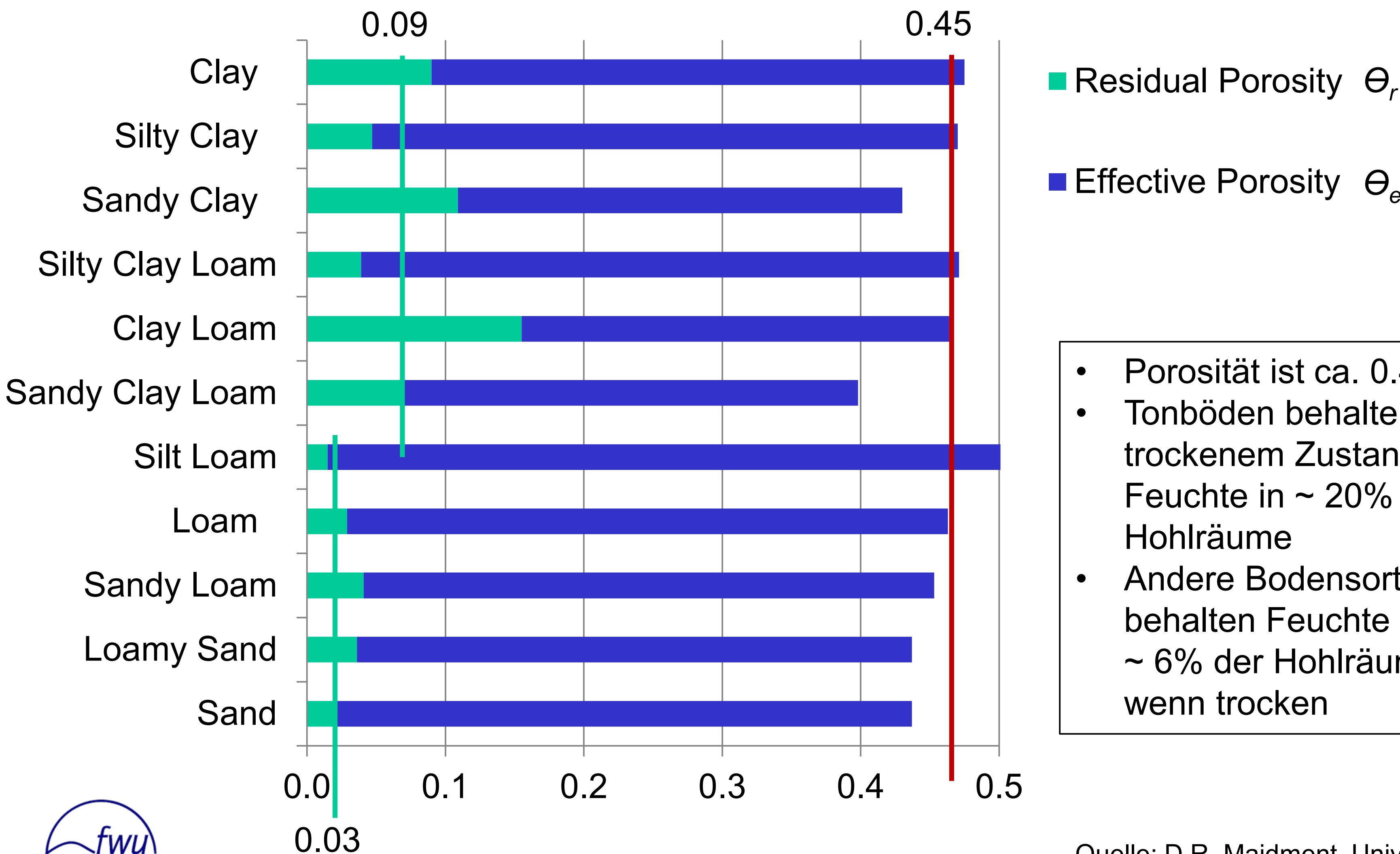


Beispiele für typische Parameterwerte

Texture	Porosity n	Residual Porosity θ_r	Effective Porosity θ_e	Suction Head ψ (cm)	Conductivity K (cm/hr)
Sand	0.437	0.020	0.417	4.95	11.78
Loamy Sand	0.437	0.036	0.401	6.13	2.99
Sandy Loam	0.453	0.041	0.412	11.01	1.09
Loam	0.463	0.029	0.434	8.89	0.34
Silt Loam	0.501	0.015	0.486	16.68	0.65
Sandy Clay Loam	0.398	0.068	0.330	21.85	0.15
Clay Loam	0.464	0.155	0.309	20.88	0.10
Silty Clay Loam	0.471	0.039	0.432	27.30	0.10
Sandy Clay	0.430	0.109	0.321	23.90	0.06
Silty Clay	0.470	0.047	0.423	29.22	0.05
Clay	0.475	0.090	0.385	31.63	0.03

Quelle: D.R. Maidment, Univ. Texas

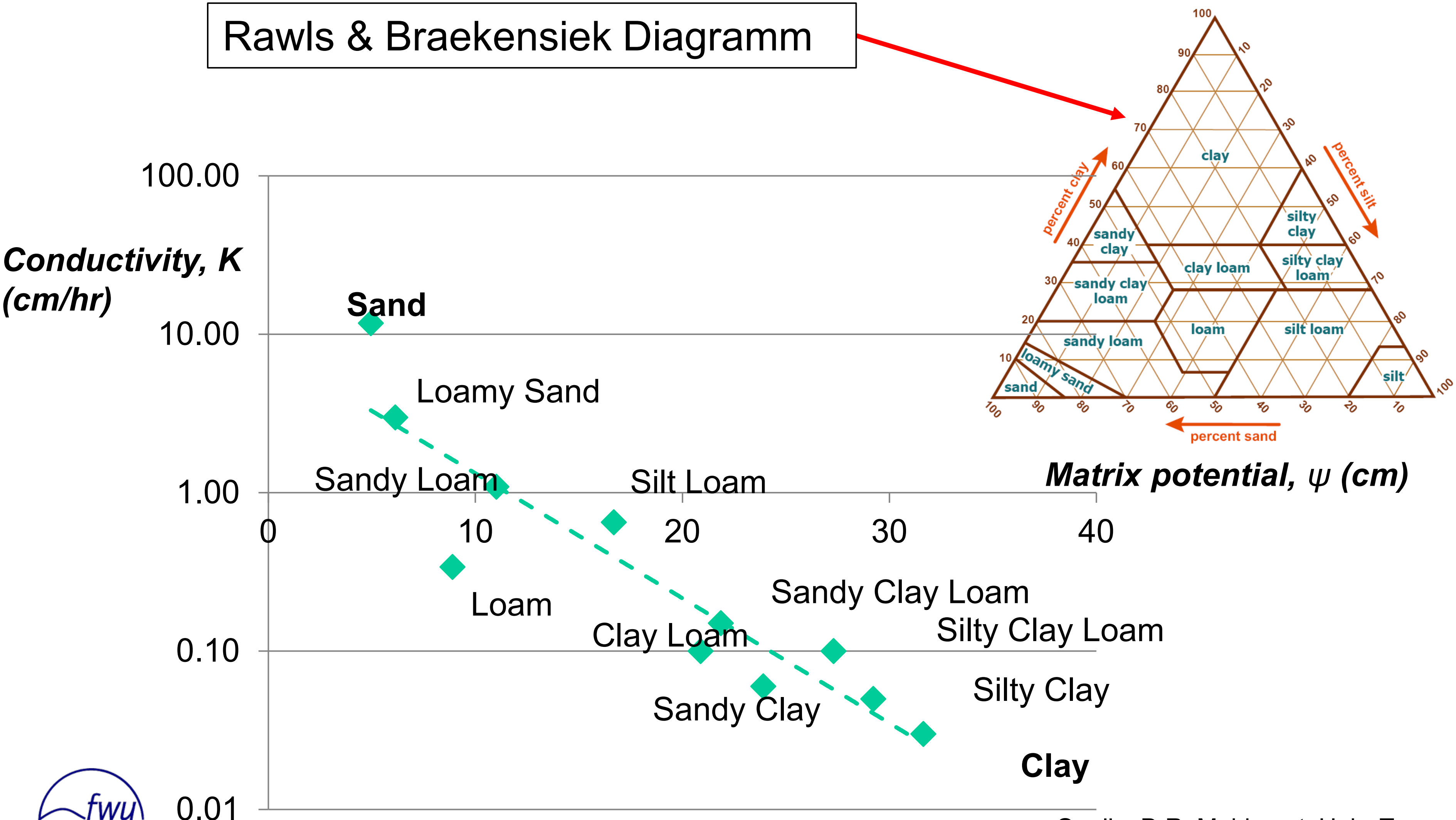
Beispiele von Porositätswerten



- Porosität ist ca. 0.45
- Tonböden behalten in trockenem Zustand Feuchte in ~ 20% der Hohlräume
- Andere Bodensorten behalten Feuchte in ~ 6% der Hohlräume wenn trocken

Quelle: D.R. Maidment, Univ. Texas

Hydraulische Leitfähigkeit- und Matrixpotentialwerte



Quelle: D.R. Maidment, Univ. Texas

Green–Ampt Modellentwicklung (1)

L = Bodentiefe zur Feuchtigkeitsfront

θ_i = Bodenfeuchte zum Zeitpunkt t_0

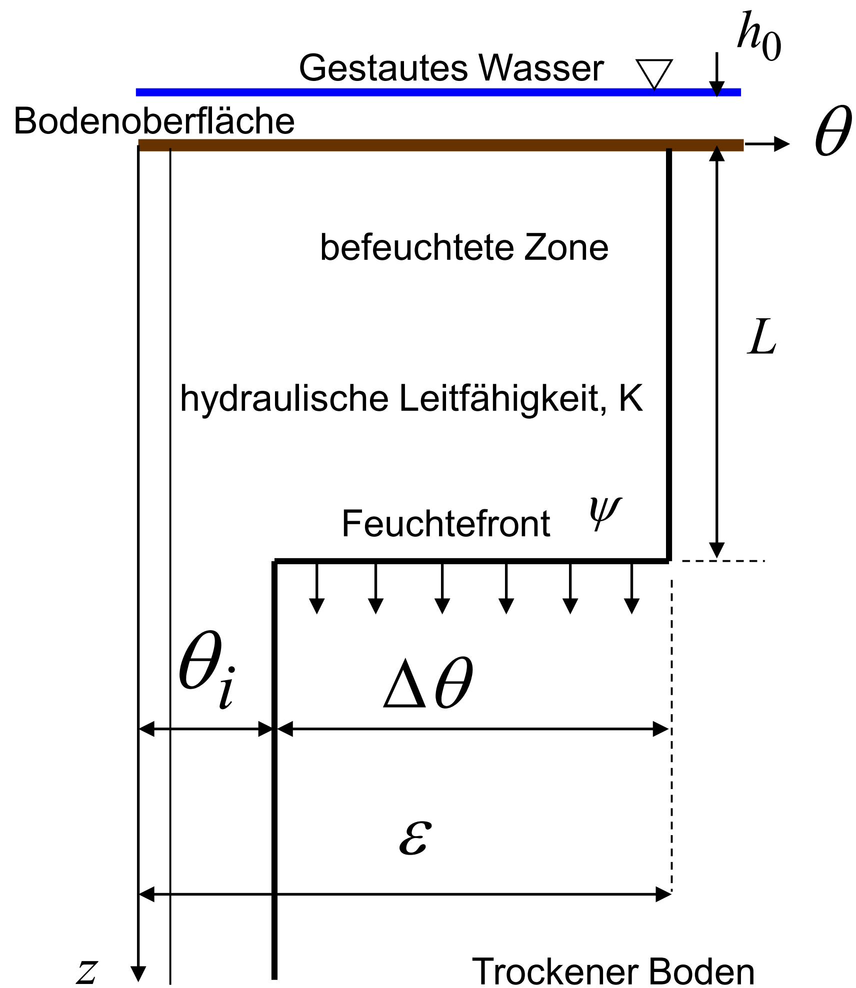
$$f = \frac{dF}{dt} = \Delta\theta \frac{dL}{dt}$$

Darcy`sches Gesetz

$$q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} = -f$$

$$h = \Psi + z$$

$$f = K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K$$



Green–Ampt Modellentwicklung (2)

$$\Rightarrow \quad f = K\frac{\partial\psi}{\partial z} + K$$

Wir wenden eine Finite Differenz an zwischen:

– der Bodenoberfläche: $z = 0, \psi = 0$

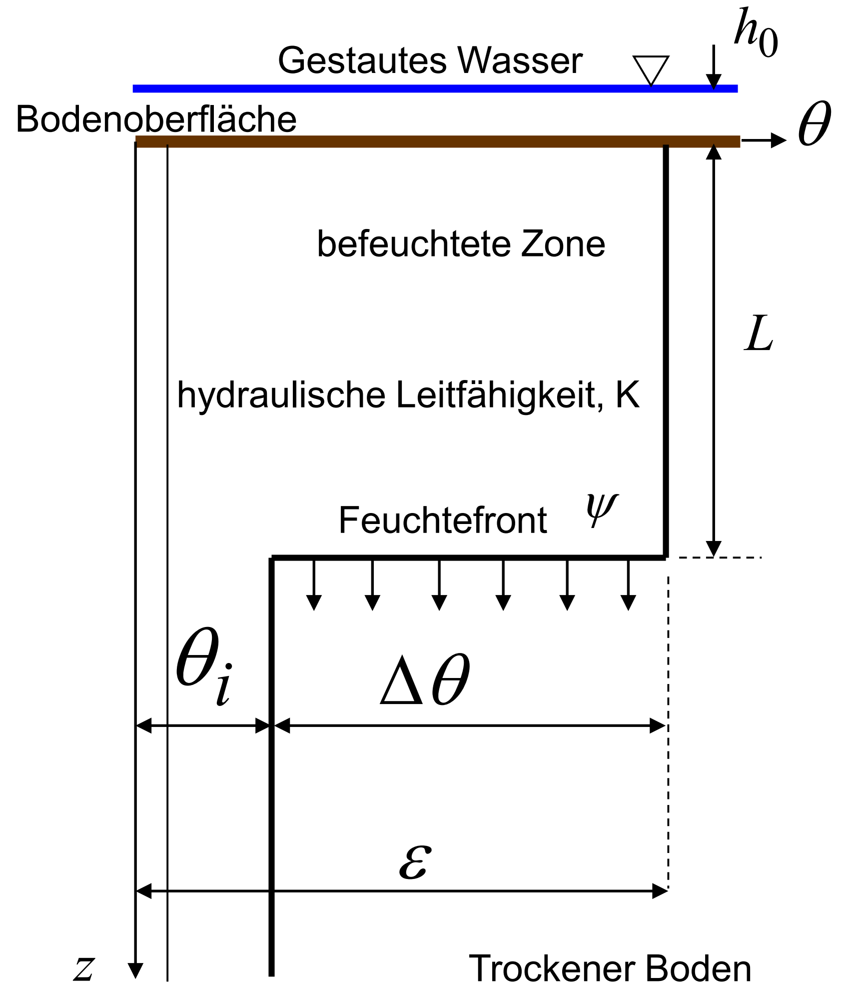
– und der Feuchtefront: $z = L, \psi = \psi$

$$f = K\frac{\partial\psi}{\partial z} + K = K\frac{\Delta\psi}{\Delta z} + K = K\frac{\psi - 0}{L - 0} + K$$

$$F(t) = L(\varepsilon - \theta_i) = L\Delta\theta$$

$$L = \frac{F}{\Delta\theta}$$

$$\boxed{f = K\left(\frac{\psi\Delta\theta}{F} + 1\right)}$$



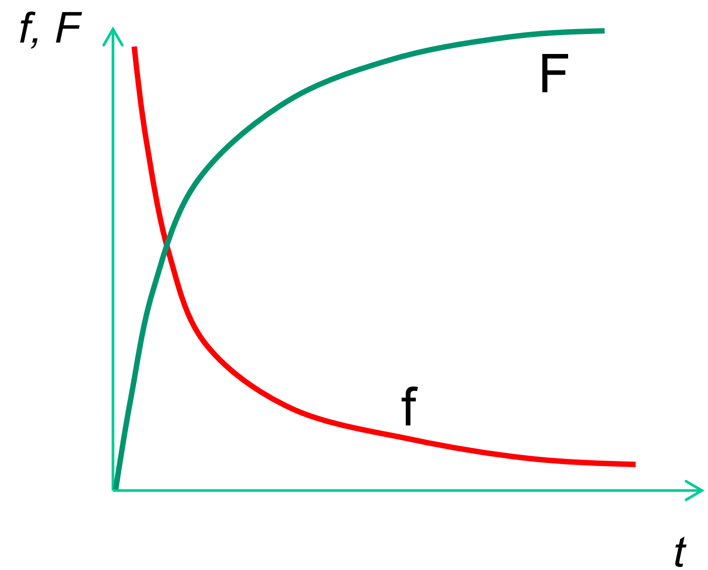
Green – Ampt Infiltration (Cont.)

Da die Beziehung $f = \frac{dF}{dt}$ gültig ist:

kann man *f(t)* in der Zeit integrieren und erhält den bereits erwähnten Ausdruck:

$$F = Kt + \psi\Delta\theta \ln\left(1 + \frac{F}{\psi\Delta\theta}\right)$$

Die Gleichung ist nicht-linear und erfordert iterative Lösung.



Quelle: D.R. Maidment, Univ. Texas

Die Gleichung nach Philip

- Benannt nach John R. Philip (1927-1999), einem australischen Wissenschaftler der Bodenkunde.
- Die Infiltrationsrate wird folgendermaßen modelliert:

$$f(t) = \frac{1}{2} S t^{-1/2} + K$$

woraus folgt dass:

$$F(t) = S t^{1/2} + K t$$

S : Sorptivität des Bodens, definiert als: $S(\theta_s, \theta_i) = \frac{(\theta_s - \theta_i) L}{t^{1/2}}$

K: Infiltrationsrate unter stationären Bedingungen. Sie ist gleich der hydraulischen Leitfähigkeit im gesättigten Boden.

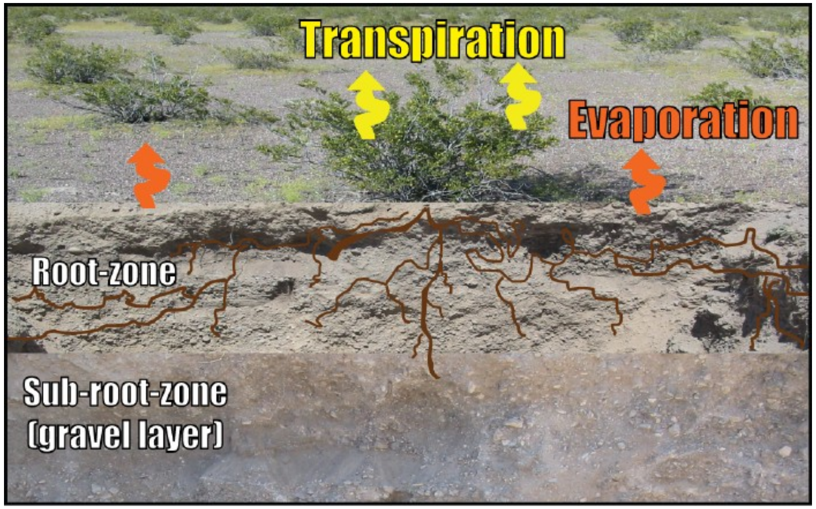
- Philips Gleichung ist eine analytische Lösung der vereinfachten Richards-Gleichung unter der Annahme $D = D(\theta)$:

$$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} + K \right)$$

Verdunstung

- Die Verdunstung aus dem Boden durch Sonneneinstrahlung an der Oberfläche ist der umgekehrte Prozess der Infiltration.
- Dabei wird die Bodenfeuchte durch Austrocknung von der Oberfläche vertikal nach oben entnommen.
- Die Feuchtigkeit diffundiert nach oben, angetrieben von der Randbedingung, dass an der Erdoberfläche die potentielle Verdunstung der Atmosphäre agiert.

Luftströmung

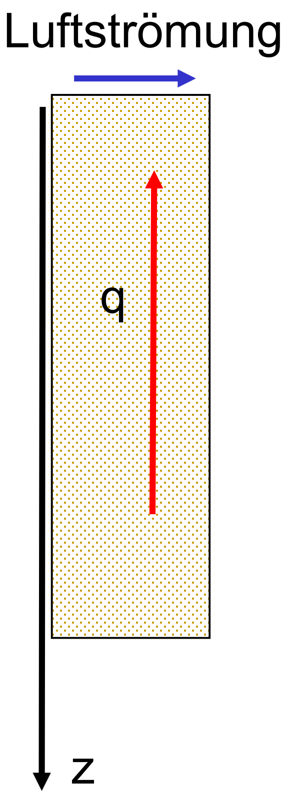


Quelle: toxiccs.usgs.gov

Der Diffusionsprozess wird ebenfalls durch die Richards Gleichung beschrieben.

Die Verdunstung ist Thema der Vorlesung „Evapo-transpiration“

Exfiltration (Verdunstung aus Boden)



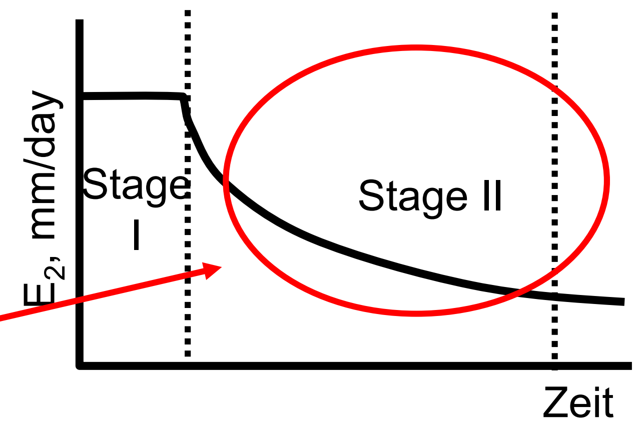
$$q = D\frac{\partial\theta}{\partial z} \qquad D = K\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$

q = Bodenwasserfluss = Evaporationsrate

Eine analytische Lösung der Richard-Gleichung, wobei die potentielle Verdunstungsrate *PE* an der Oberfläche als Randbedingung angegeben wird, ergibt einen Ausdruck für die Boden-gesteuerte Verdunstung:

$$q_o = D\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=0} = PE$$

Daraus ergibt sich die maximal mögliche Evaporation nach Green-Ampt:



$$E_{s,2} = \frac{1}{2}S_e t^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}K(\theta)\,; S_e = \text{Sorptivität}$$

In Analogie zur Infiltration wird sie Exfiltrationskapazität (Eagleson, 1978c) bezeichnet.

Zusammenfassung

- Es wurden die bekanntesten Ansätze der Infiltrationsmodelle durchgenommen.
- Die Modelle beruhen auf einer vereinfachten Beschreibung der Infiltration, wie im Falle des Green-Ampt Modells (Kolben Prinzip).
- Anderwärtig fußen sie auf analytischen Lösungen der vereinfachten Richards-Gleichung.
- In allen Modellen der Infiltration müssen experimentell ermittelte Bodenparameterwerte eingeführt werden.
- Die Infiltrationsmodelle finden in physikalisch-deterministischen hydrologischen Modellen Verwendung, um die verschiedenen Abflussprozesse zu beschreiben.
- Ursprünglich wurden die Modelle zur Anwendungen im Bereich der Bewässerungssysteme im Landbau entwickelt.

Literaturhinweise

- Horton, Robert E. (1933), The role of infiltration in the hydrologic cycle, Trans. Am. Geophys. Union. 14th Ann. Mtg, 446–460.
- Green, W.H. and G. Ampt (1911), Studies of soil physics, part I, the flow of air and water through soils, J. Ag. Science. 4:1-24.
- Rawls, W.J., and D.L. Brakensiek (1989), Estimation of soil water retention curve and hydraulic properties. p. 275-300. In: Morel S. (Ed.), Unsaturated flow in hydrologic modeling. Theory and practice. Kluwer academic publishers, Beltsville, USA.
- Philip, J.R. (1969), Theory of infiltration, Advances in Hydroscience, 5, 215-296.
- Maidment, D.R., (1993), Handbook of Hydrology, McGraw-Hill.
- Eagleson, P.S. (1978a) Climate, soil, and vegetation. 1. Introduction to water-balance dynamics. Water Resources Research 14, 705-712


Sie sind mit Fragen willkommen!