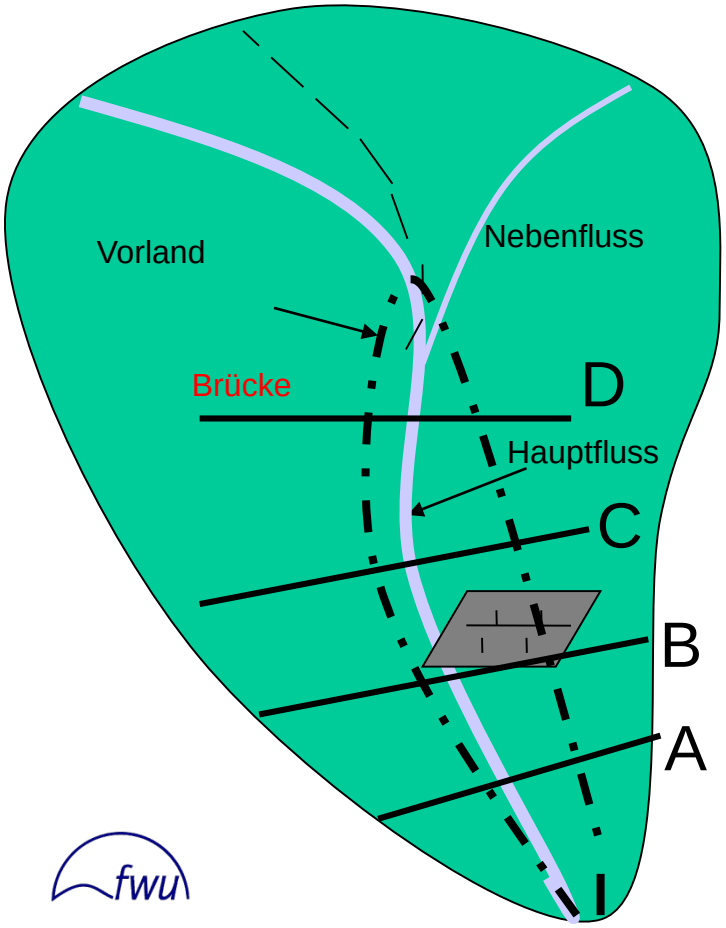
Vorlesung
Hydrologische Modellierung
Gerinneabfluss

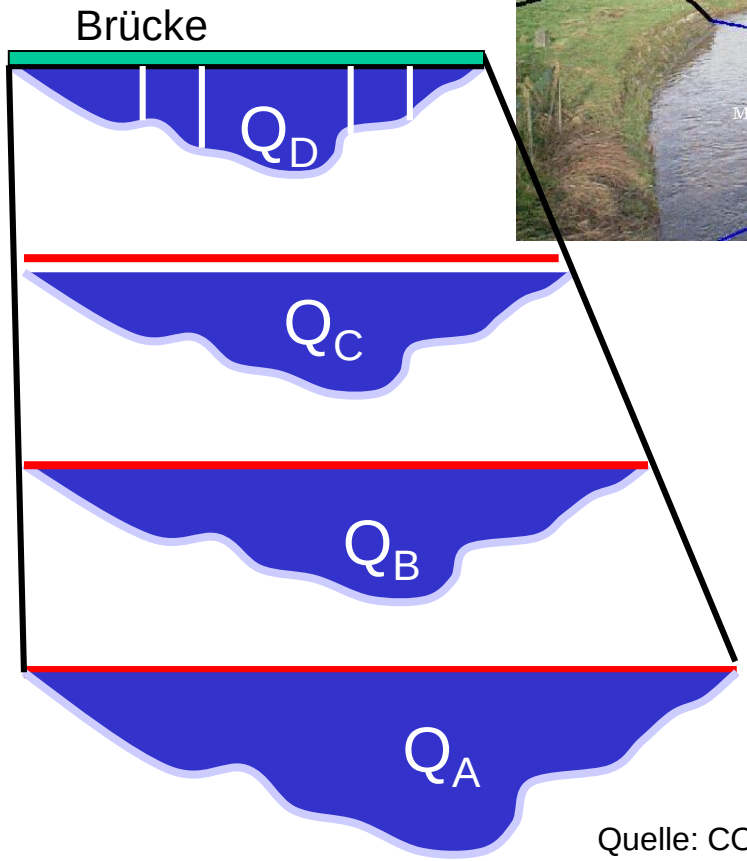
Masters Modul M_VW3

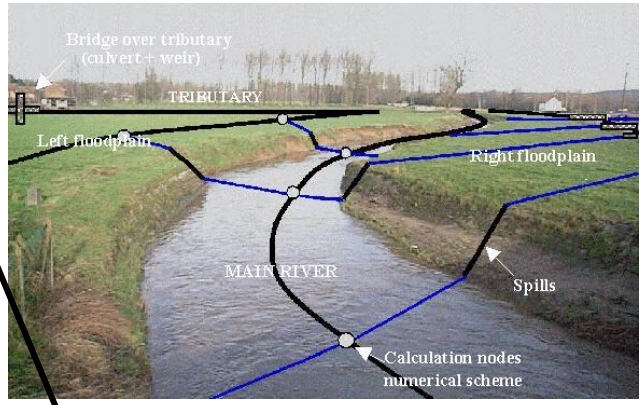
Einleitung

- In dieser Vorlesung wird die hydrodynamische Modellierung von Gerinneflüssen behandelt.
- Bisher wurden vereinfachte Modelle beschrieben, in der das Gerinne als eine Kaskade von Speichern (Nash Kaskade) oder Flusselementen dargestellt wird, (Pulsverformung, Muskingum Methode) wobei nur die Massenerhaltung zur Anwendung kommt.
- In folgenden Abschnitten wir die Beschreibung des Gerinneabflusses unter Einbeziehung des Erhalts von Masse und Impuls beschrieben (hydrodynamisches Modell).
- Die daraus resultierende Beschreibung gestattet eine physikalische Darstellung der Ausbreitung einer Flutwelle, mit genauerer Reproduktion der Pegelstände, als dies mit vereinfachten Modellen möglich ist.
- Die Kehrseite der hydrodynamischen Modellierung ist ein größerer Daten und Rechenzeitaufwand.

Hydrodynamisches Verfahren zur Wellenausbreitung

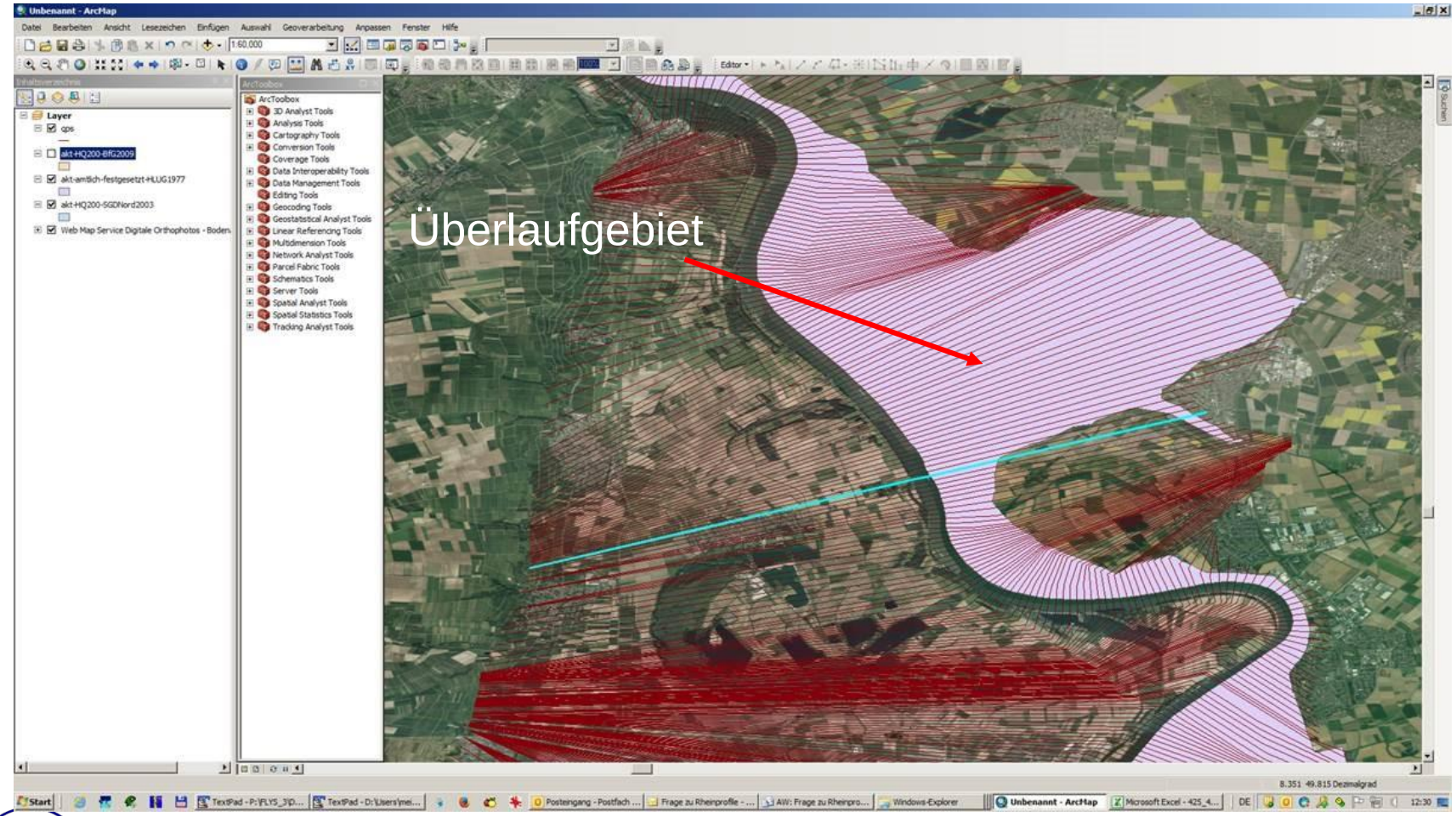






Quelle: COMET

Flussquerschnittsprofile am Rhein



Grundlegenden Annahmen

Die folgenden Annahmen liegen der hydrodynamischen Modellierung (Saint-Venant Modell) des Gerinneabflusses zugrunde:

- Der Flussbeschreibung ist 1-D, 2-D Effekte spielen keine Rolle.
- Die vertikale Beschleunigung ist vernachlässigbar und die Druckverteilung darum hydrostatisch.
- Die Krümmung der Rinne ist klein.
- Die Rinne weist ein mildes Sohlgefälle auf.
- Die Reibungsverluste werden durch die Manning bzw. Strickler Formel beschrieben.
- Das Fluid ist nicht komprimierbar mit konstanter Dichte ρ.

Das Saint-Venant Modell

- Die vollständigste Beschreibung eines 1-D Gerinneabflusses sind die Saint-Venant Gleichungen. Sie fußen auf der Masse und Impulserhaltung des Wassers.
- Die Massenerhaltung für ein infinitesimales Flusssegment ist:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

- Die Impulserhaltung wird wie folgt angeschrieben:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + g\frac{\partial h}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$

- Die simultane Lösung der gekoppelten Gleichungen führt zur Ermittlung von *Q(x,t)* und *A(x,t)* in Raum und Zeit.
- Das Modell wird auch „dynamische Welle“ genannt.

Massenerhaltung

- Die Massenerhaltung kann in zwei Formen angeschrieben werden:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

- Erhaltungsform (der Abfluss $Q=v\,A$ ist abhängige Variable). In der Erhaltungsform ist die Erhaltungsgröße „Masse“ direkt erhalten.

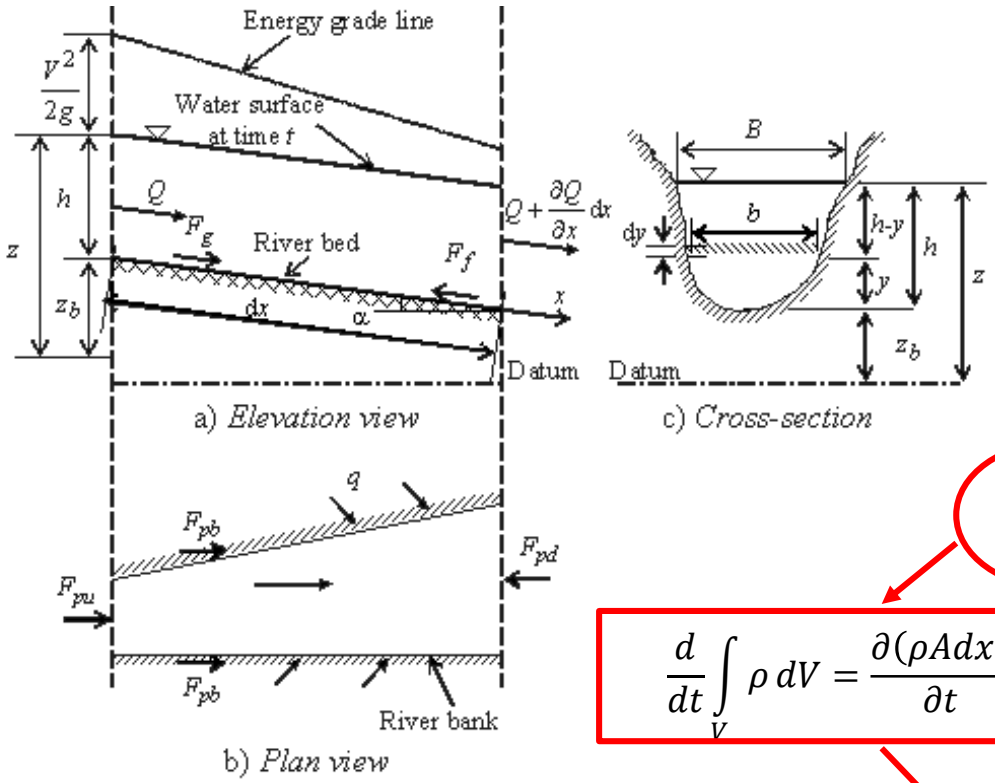
$$\frac{\partial (vh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = q$$

$$v\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = q$$

- Nicht-Erhaltungsform bei Flussbreite B, wobei $dA=Bdh$. Hier ist die Fliessgeschwindigkeit die abhängige Variable.

$-Q-\frac{\partial Q}{\partial x}dx$

Ableitung der Massenerhaltsgleichung



- Zufluss: $-Q-q\Delta x$
- Abfluss: $Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx$
- Speichereffekt: $\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t}$

Anwendung des Transportsatzes von Reynolds am Kontrollvolumen:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_V \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}dA$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t}$$

$$\int_V \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}d = Q + qdx - Q - \frac{\partial Q}{\partial x}dx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}-q=0$$

Ableitung der Impulserhaltung

- Anwendung des Transportsatzes von Reynolds am Kontrollvolumen

$$\sum F = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV}_{\text{Impulsspeichereffekt im Kontrollvolumen}} = \underbrace{\int_V \rho\,\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dA}_{\text{Impulsfluss durch die Außengrenze des Kontrollvolumens}}$$

$\sum F$: Summe der Kräfte am Kontrollvolumen

$$\int_V \rho\,\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \rho\left[vQ + vq\,dx - vQ - \frac{\partial(vQ)}{\partial x}dx\right] = \rho\left[\frac{\partial(vQ)}{\partial x} - vq\right]dx = \rho\left[\frac{\partial(QQ/A)}{\partial x} - vq\right]dx$$

Ableitung der Impulserhaltung (fortf.)

- Anwendung des Transportsatzes von Reynolds am Kontrollvolumen

$$\sum F = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV}_{\text{Impulsspeichereffekt im Kontrollvolumen}} = \underbrace{\int_V \rho\,\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dA}_{\text{Impulsfluss durch die Außengrenze des Kontrollvolumens}}$$

Summe der Kräfte am Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV = \rho\frac{\partial Q}{\partial t}dx$$

Ableitung der Impulserhaltung (fortf.)

- Anwendung des Transportsatzes von Reynolds am Kontrollvolumen

$$\sum F = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV}_{\text{Impulsspeichereffekt im Kontrollvolumen}} = \underbrace{\int_V \rho\,\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dA}_{\text{Impulsfluss durch die Außengrenze des Kontrollvolumens}}$$

$\sum F$: Summe der Kräfte am Kontrollvolumen

$$\sum F = F_g - F_f + F_{pu} - F_{pd} + F_{pb}$$

Ermittlung der einzelnen Kräfte

$$F_g = \rho g A dx \sin(\alpha) = \rho g A dx S_0 \,;\, \sin(\alpha) \approx dz_b/dx = S_0$$

Gravität

$$F_f = \rho g A dx S_f$$

Reibung

$$F_{pu} = \int_0^h \rho g b(y)(h-y)dy$$

Druckkraft Eingang

$$F_{pd} = F_{pu} + \frac{\partial F_{pu}}{\partial x} dx$$

Druckkraft Ausgang

$$\frac{\partial F_{pu}}{\partial x} = \int_0^h \rho g b \frac{\partial h}{\partial x} dy + \int_0^h \rho g (h-y) \frac{\partial b}{\partial x} dy = \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} + \int_0^h \rho g (h-y) \frac{\partial b}{\partial x} dy$$

$$F_{pb} = \left[\int_0^h \rho g (h-y) \frac{\partial b}{\partial x} dy \right] dx$$

Druckkraft an den Seiten des Gerinnes

fwu

Summe der Kräfte

- Die Kräfte werden addiert:

$$\sum F = F_g - F_f + F_{pu} - F_{pd} + F_{pb} = F_g - F_f + F_{pu} - F_{pu} - \frac{\partial F_{pu}}{\partial x} dx + F_{pb}$$

$$= \rho g A dx (S_0 - S_f) - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

- und anschließend in den Reynoldsatz substituiert. Man erhält die Impulserhaltung:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_o - S_f) = 0$$

Analyse der Impulserhaltung

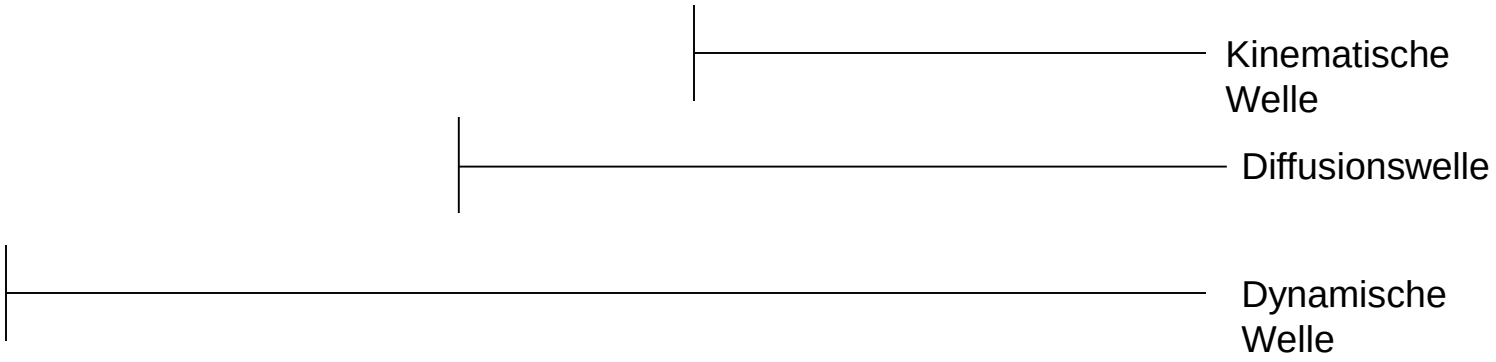
$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$

Nichterhaltungs-form

Lokale Beschleunigung | Konvektive Beschleunigung | Druckkraft | Gravität | Reibung

$$\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + g\frac{\partial h}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$

Erhaltungsform



Das Dynamische Wellenmodell

- Das dynamische Wellenmodell (auch Saint-Venant Modell genannt) ist das vollständige physikalisch-deterministische Modell, das zur 1-Dimensionalen Beschreibung der Flutwellenausbreitung in einem Gerinne zur Verfügung steht.
- Das Modell enthält alle Beschleunigungs- und konvektiven Terme, sowie die Gradienten der Wasseroberfläche, die zur Beschreibung der Flutwelle erforderlich sind.
- Rückstaueffekte durch Hindernisse flussabwärts können durch die Darstellung der Neigung der Wasseroberfläche (Rückstauprofil) physikalisch korrekt beschrieben werden.
- Das dynamische Modell ist auch geeignet um Strömungen mit sehr geringen Sohlgefällen, i.e. $S_0<10^{-4}$, physikalisch adäquat zu beschreiben.

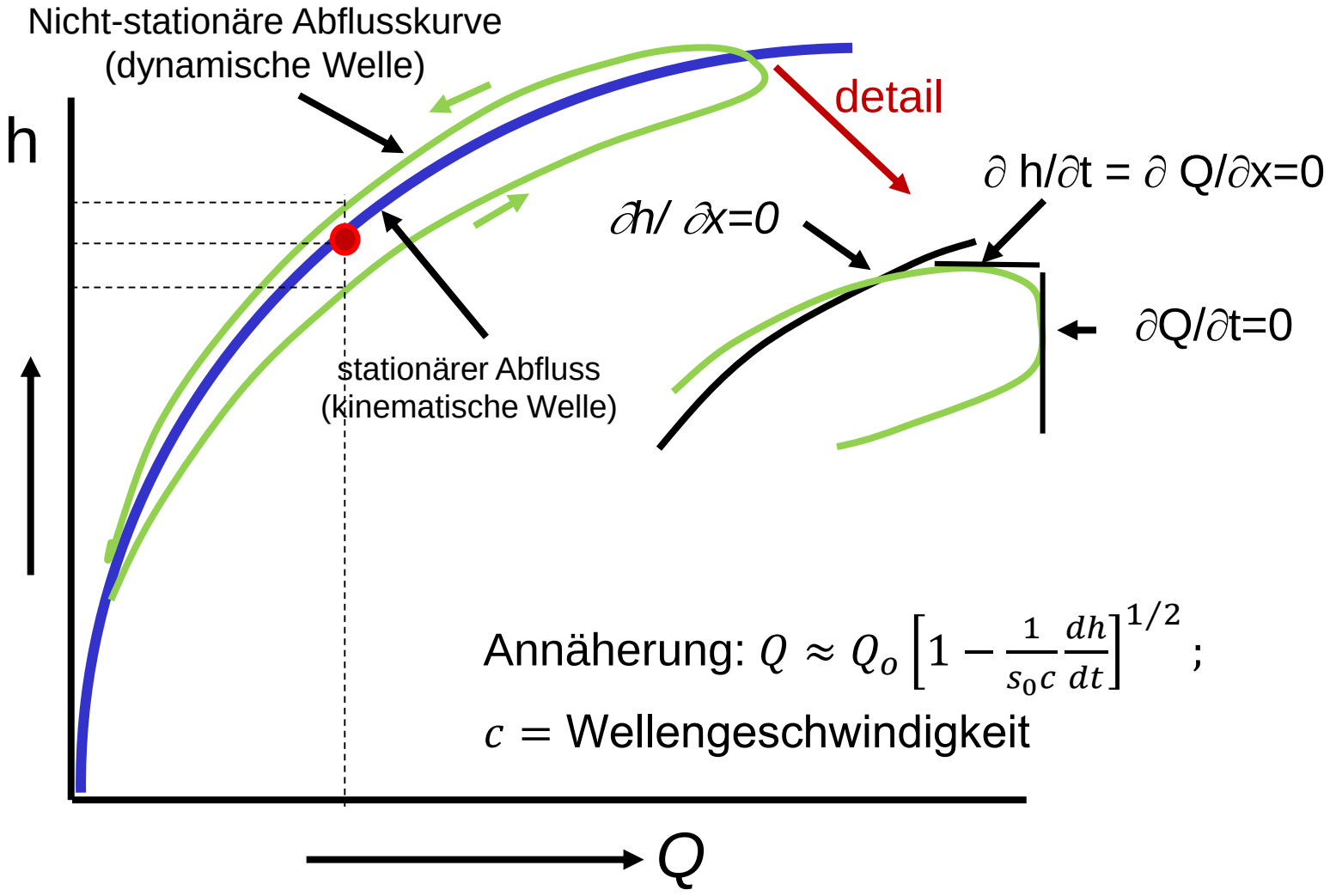
Nicht-stationärer ungleichförmiger Abfluss

- Die Impulserhaltung des dynamische Wellenmodells kann umstrukturiert werden und der Abfluss als eine Funktion der verschiedenen Beschleunigungsterme ausgedrückt werden.
- Unter nicht-stationärem, ungleichförmigem Abfluss besteht eine Hysterese Effekt (=Verzögerung) zwischen Abfluss und Pegelstand:

$$Q = Q_o \left[1 - \frac{1}{S_0}\frac{dh}{dx} - \frac{1}{s_0 g A}\frac{d(Q^2/A)}{dx} - \frac{1}{s_0 g A}\frac{dQ}{dt}\right]^{1/2}$$

- Mit sich verringerndem Sohlgefälle S_0 nimmt der Einfluss der Terme mit negativem Vorzeichen in der Klammer an Bedeutung zu, was zu einer typischen *Q(y)* (Abflusskurve) mit Hystereseeffekt führt.

Nicht-stationärer ungleichförmiger Abfluss: Q(h)

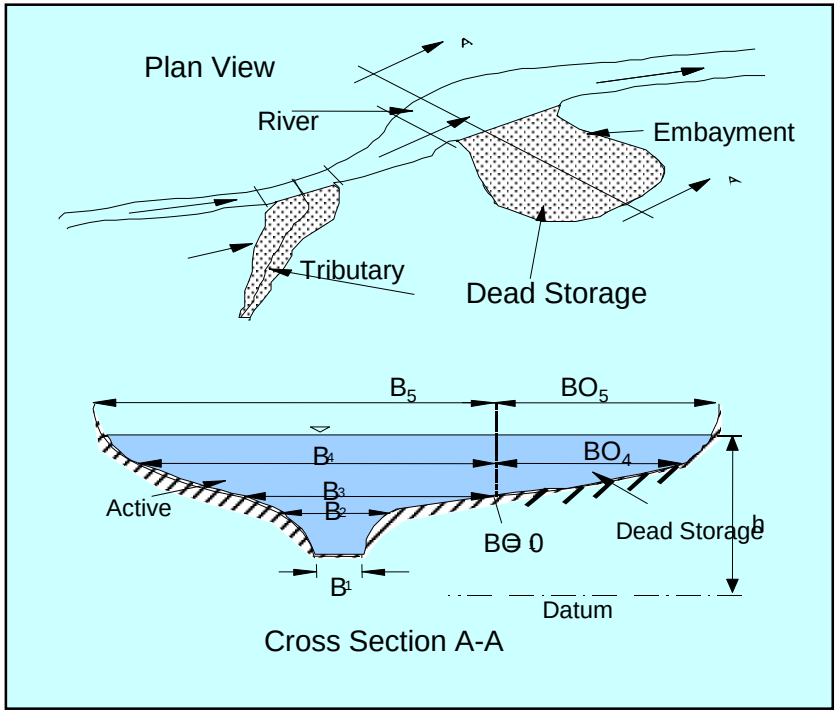


Annäherung: $Q \approx Q_o \left[1 - \frac{1}{s_0 c}\frac{dh}{dt}\right]^{1/2}$;

c = Wellengeschwindigkeit

Anwendung des dynamischen Wellenmodells

- Mit dem dynamischen Wellenmodell werden nicht-stationäre ungleichförmige 1-D Strömungen in Gerinnen simuliert.
- Hydrodynamische Eigenschaften wie die hydraulische Rauheit des Flussbetts können ebenfalls räumlich variabel angegeben werden.



Fluss mit Überlaufgebieten und Querschnittsansicht

Das Kinematische Wellenmodell

- Beim kinematischen Wellenmodell wird die Impulserhaltung stark vereinfacht:

$$g(S_o - S_f) = 0 \Rightarrow S_o = S_f. \quad \text{Nach Manning: } S_f = n\frac{v^2}{R_h^{\frac{4}{3}}}$$

- Diese Annahme bedeutet, dass die Neigung der Energielinie gleich jener der Wasseroberfläche ist. Dies ist ausschließlich in Gerinnen mit einer Sohlneigung > 10^{-4} der Fall.
- Die Massenerhaltung bleibt bestehen:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

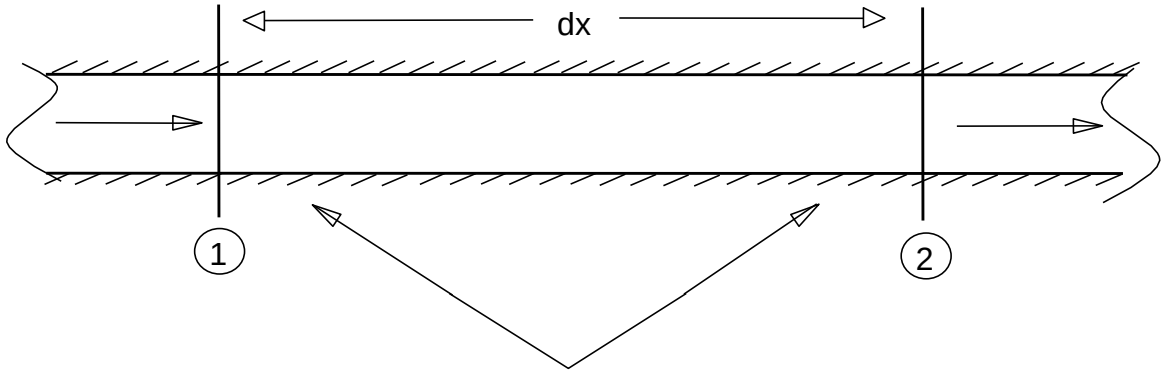
- Die Massenerhaltung wird zusammen mit der Manning Gleichung genutzt um $Q=vA$ zu ersetzen, und die Gleichung nach Querschnitt A bzw. der Wassertiefe h zu lösen.

Anwendung des Kinematischen Wellenmodells

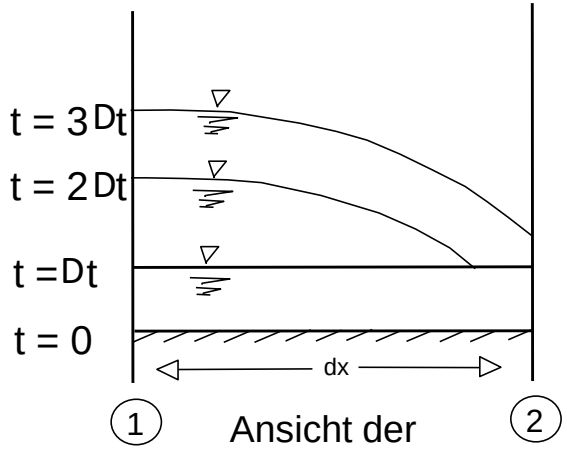
- Bei der kinematischen Welle werden die Beschleunigungsterme, die konvektiven Terme und die räumliche Verformung des Wasserspiegels in der Impulserhaltung vernachlässigt.
- Das Ergebnis ist eine einfache Differentialgleichung, die unter bestimmten Bedingungen auch analytisch gelöst werden kann.
- Das Modell ist nicht für die Simulation von Gefällen mit einer Sohlneigung $S_0<10^{-4}$ geeignet, da die hydrodynamischen Terme, die für die Krümmung des Wasserspiegels verantwortlich sind, fehlen.
- Das Modell kann nicht Staueffekte, die von flussabwärts gelegene Hindernisse (z.B. Brücken, Verengung) verursacht werden, reproduzieren.
- Die einfache Lösbarkeit der Gleichung (durch z.B. ein explizites Schema) ist ein entschiedener Vorteil gegenüber dem vollständigen Saint-Venant Modell.

fwu

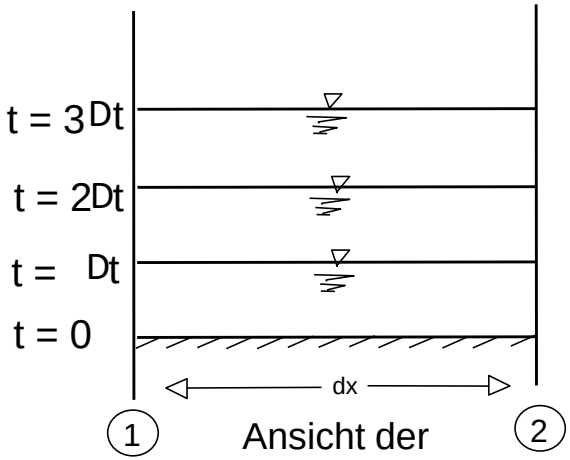
Dynamische vs. Kinematische Welle



Allmähliche Steigung des Pegels mit Neigung der Oberfläche *dh/dx≠0*



Ansicht der **dynamischen** Welle



Ansicht der **kinematischen** Welle

Allmähliche Steigung des Pegels, keine Neigung der Oberfläche, i.e. *dh/dx=0*

Diffusionswelle

- Bei der Diffusionswelle wird dir Impulserhaltung folgendermaßen vereinfacht:

$$g\frac{\partial h}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$$

- Diese Annahme bedeutet dass die räumliche Veränderung der Wasserspiegelneigung berücksichtigt wird, die Konvektiven und Beschleunigungsterme aber vernachlässigt werden.
- Die Massenerhaltung bleibt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

- Durch Kombination erhält man eine Konvektion-Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C(h, \frac{\partial h}{\partial x})\frac{\partial Q}{\partial x} + D(h, \frac{\partial h}{\partial x})\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = q$$

Vor und Nachteile des Diffusionswellenmodells

Vorteile des Diffusionswellenmodell sind:

- Numerisch Stabilität für schießende Strömungen (superkritische Strömung)
- Fast vergleichbares Verhalten wie das dynamische Wellenmodell im Bereich superkritischer Strömung.

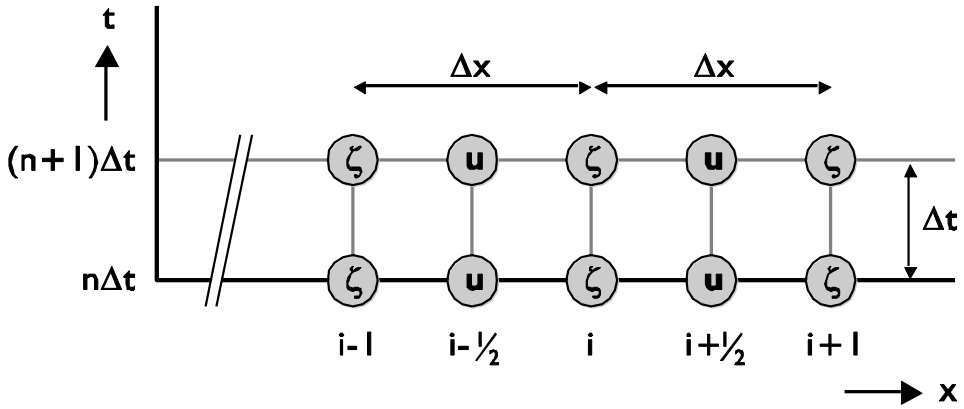
Nachteile sind:

- die Unfähigkeit des Modells Rückstaueffekte bei geringer Sohlneigung korrekt darzustellen, da entscheidende Terme fehlen.
- Das Modell ist nicht zu 100% massenerhaltend, außer es handelt sich um eine lineare Diffusionswelle mir konstanten Koeffizienten C und D.
- Das Modell ist nicht geeignet Strömungen darzustellen, in der eine nicht-vernachlässigbare Neigung der Wasseroberfläche auftritt, wie z.B. im Falle von Dammbruchereignissen, und das Sohlgefälle gering ist, i.e. $S_0 < 10^{-4}$.

Lösung der Saint-Venant Gleichungen

- Analytisches Verfahren durch Annäherung
  - Die analytische Lösung wird durch Trennung der Variablen ermöglicht
  - Eine analytische Lösung ist nur in wenigen besonderen Fällen der kinematischen Welle möglich.

- Numerisches Verfahren
  - Finite Differenzen bzw. Finite Volumen Methode.
  - Die Gleichungen werden in Raum (x) und Zeit (t) diskretisiert.
  - „Staggered-Grid“ Schematisierung (verschobenes Gitter) .
  - Die numerische Lösung führt zu Abflüssen *Q* und Wassertiefen *h* an den Gitterpunkten.



x-t Raum für Finite Differenzen Lösung

Ansätze der numerischen Lösung

- Massenerhaltungsgleichung: $\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0$

- Diskretisierung mit der Methode der finiten Differenzen:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1/2}^n \, v_{i+1/2}^{n+\theta} - h_{i-1/2}^n \, v_{i-1/2}^{n+\theta}}{\Delta x} = 0$$

- wobei $v^{n+\theta} = (1-\theta)v^n + \theta v^{n+1}$ und θ ein durch den Nutzer definiertes Gewicht ist, das z.B. gleich $\theta = 1/2$ gesetzt werden kann.
- $\zeta = z_b + h$ ist die absolute Höhe der Wasseroberfläche.
- Die numerische Diskretisierung der Gleichungen führt zu einem linearen Gleichungssystem mit multiplen Diagonalen.

$$\alpha 1_i \; v_{i-1/2}^{n+1} + \beta 1_i \; h_i^{n+1} + \gamma 1_i \; v_{i+1/2}^{n+1} = \delta 1_i$$

Ansätze der numerischen Lösung (fortf.)

- Impulserhaltung: $$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial \varsigma}{\partial x} + gS_f = 0$$

- Diskretisierung mit der Methode der finiten Differenzen

$$\frac{v_{i+1/2}^{n+1} - v_{i+1/2}^{n}}{\Delta t} + a\left(v^n, v^n\right) + g\frac{\varsigma_{i+1}^{n+\theta} - \varsigma_i^{n+\theta}}{\Delta x} + c_f \frac{\left|v_{i+1/2}^{n}\right| v_{i+1/2}^{n+1}}{h_{i+1/2}^{n}} = 0$$

- wobei $\zeta = z_b + h$ die absolute Höhe der Wasseroberfläche ist.
- $a(u^n, u^n)$ ist eine Generalisierung des konvektiven Impulsterms:

$$\alpha\left(v^n, v^n\right) = v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial (vq)}{\partial x} - v\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \frac{1}{\bar{h}_{i+1/2}}\left(\frac{v_{i+1}\bar{q}_{i+1} - v_i\bar{q}_i}{\Delta x} - v_{i+1/2}\frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}{\Delta x}\right)$$

$$\bar{h}_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}; \quad \bar{q}_i = \frac{q_{i-1/2} + q_{i+1/2}}{2} \quad \text{und} \quad q_{i+1/2} = h_{i+1/2}v_{i+1/2}$$

Ansätze der numerischen Lösung (fortf.)

- Die Terme werden geordnet und man erhält ein lineares Gleichungssystem mit drei Diagonalen:

$$\alpha 2_i \; \varsigma_i^{n+1} + \beta 2_i \; v_{i+1/2}^{n+1} + \gamma 2_i \; \varsigma_{i+1}^{n+1} = \delta 2_i$$

- Durch Kombination der Massenerhaltungsgleichung und der Impulserhaltungsgleichung erhält man ein Gleichungssystem in ausschließlich absoluten Höhen ς_i^1 des Wasserspiegels:

$$\alpha_i \; \varsigma_{i-1}^{n+1} + \beta_i \; \varsigma_i^{n+1} + \gamma_i \; \varsigma_{i+1}^{n+1} = \delta_i$$

- Anschließend können die Strömungsgeschwindigkeiten v_i^n und die Durchflüsse abgeleitet werden.

Zusammenfassung

- In dieser Vorlesung wurde die hydrodynamische Modelle der Wellenausbreitung behandelt.
- Diese Modelle fußen auf die Erhaltung von *1)* Masse und *2)* Impuls des Wassers.
- Das vollständige Modell sind die Saint-Venant Gleichungen bzw. das dynamische Wellenmodell.
- Vereinfachte Formen sind *a)* das Diffusionswellenmodell und *b)* das kinematische Wellenmodell.
- Die vereinfachten Modelle sind auf bestimmte Anwendungsbereiche begrenzt, bei denen die unterliegenden physikalischen Annahmen gültig sind.
- Anwendungen außerhalb diese Gültigkeitsbereiche führen zu verzerrten Modellergebnissen.

Literaturhinweise

- Cappelaere, B. (1997), Accurate Diffusive Wave Routing, J. Hydraulic Eng., 533 ASCE, 123(3),174-181.
- Chow, V. T. (1968), Handbook of Hydrology. MCGraw Hill, New York, NY.
- Henderson, F. M. (1966), Open Channel Flow. Macmillan, New York, NY.
- Stelling, G. S. and A. Verwey (2005), Numerical Flood Simulation, in Encyclopedia of Hydrological Sciences, John Wiley & Sons Ltd..

Sie sind mit Fragen willkommen!