Wasserwirtschaft, Flussgebietsmanagement: Optimierung

Masters Modul M_VW1

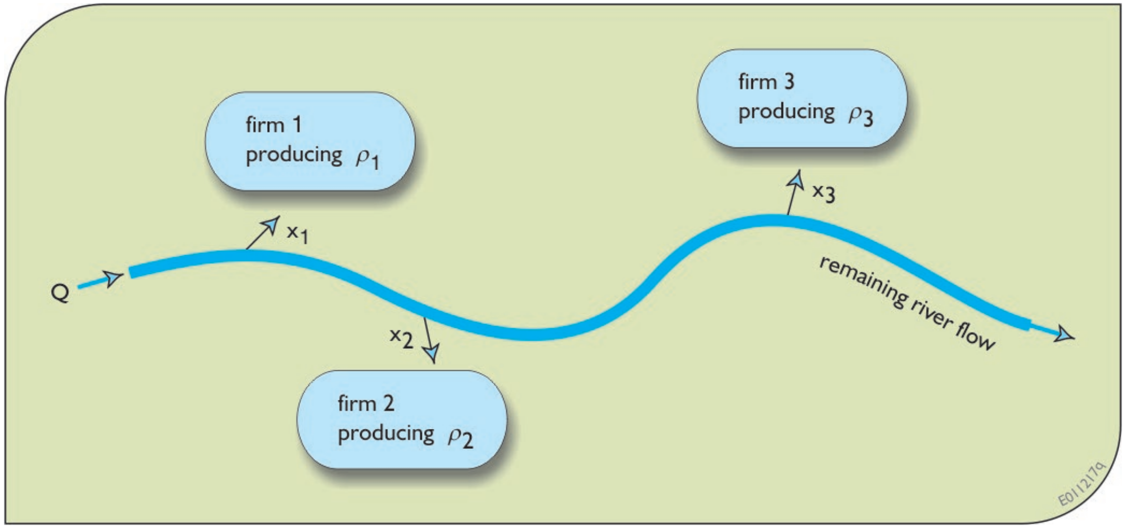
Bildmaterial: Loucks & van Beek, Water Resources Systems Planning and Management, UNESCO Publishing, 2005.

Einleitung

- In einem Flusseinzugsgebiet spielen verschiedene, oft einander völlig entgegengesetzt ausgerichtete Interessen eine Rolle.
- Was einer Interessensgruppe nutzt, gereicht einer anderen zum Nachteil.
- Bei Eingriffen in Flusseinzugsgebieten ist es darum wichtig mehrere Parteien mit **entgegengesetzten Interessen** zu bedienen, wobei die Nachteile für die einzelnen Spieler (Interessengruppen-Stakeholders) minimiert werden.
- Dies erfordert angenäherte, **optimale Lösungen** zu finden, die mehrere parallele Zielsetzungen so gut wie möglich erfüllen.
- Oft werden bestimmte Zielsetzungen anderen gegenüber als Prioritär eingestuft.
- Das suchen nach optimalen Lösungen wird als **Optimierungs-verfahren** bezeichnet und ist Gegenstand dieser Vorlesung.

Beispiel

- Drei Hersteller liegen an einem Fluss. Sie benötigen zur Erzeugung ihrer Produkte Wasser aus dem Fluss. Die Hersteller werden mit *j=1,2,3* bezeichnet.
- Das Problem liegt in der optimalen Zuweisung x_j (m³/s) von Wasser an die Betriebe. Dabei soll die Produktion optimiert werden, sodass der gesamte Nutzen für die drei Hersteller maximiert wird.



Beschreibung der Nutzenfunktion

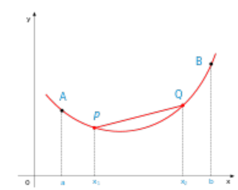
- Der Nutzen für jeden Betrieb wird als quadratische Funktionen der Wasserallokation ausgedrückt.
- Die Nutzenkurven sind für jeden Hersteller individuell verschieden und werden mathematisch beschrieben:

Gesamtnutzen (net benefit)

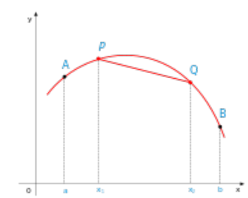
$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

$$NB_3(x_3) = 8x_3 - 0.5x_3^2$$



konvexe Funktion

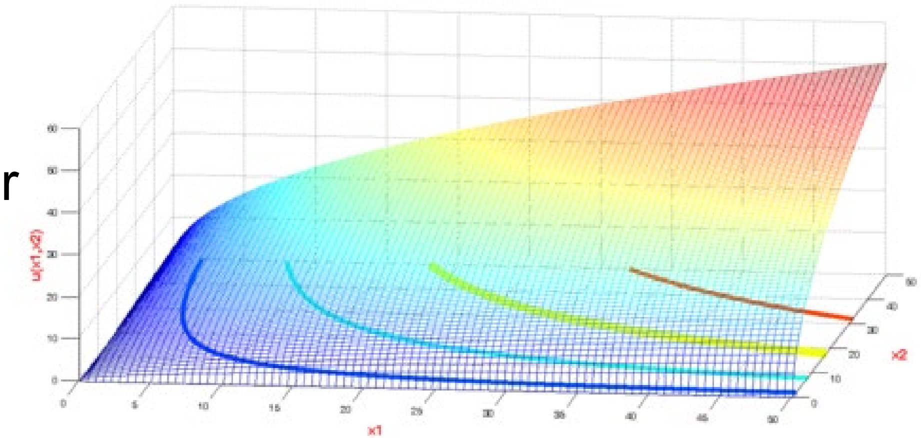


konkave Funktion

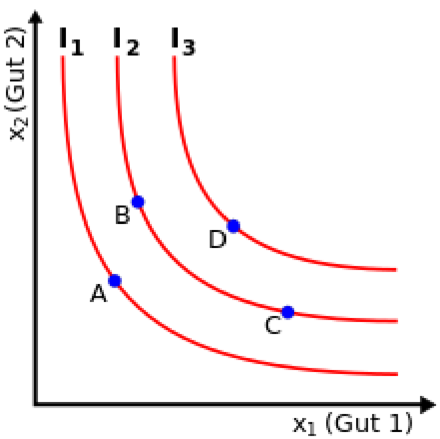
- Es handelt sich um **konkave Nutzenfunktionen**, wobei der Nutzen mit zunehmender Wasserzufuhr ab einem bestimmten Punkt abnimmt.
- Der Nutzen kann monetär als Profit ausgedrückt werden (€), aber auch in produzierten Stückzahlen oder Produktionskosten.

Beispiel: Nutzenfunktion im Zwei-Güter-Fall

Annahme: mehr = besser



Quelle: Wikipedia

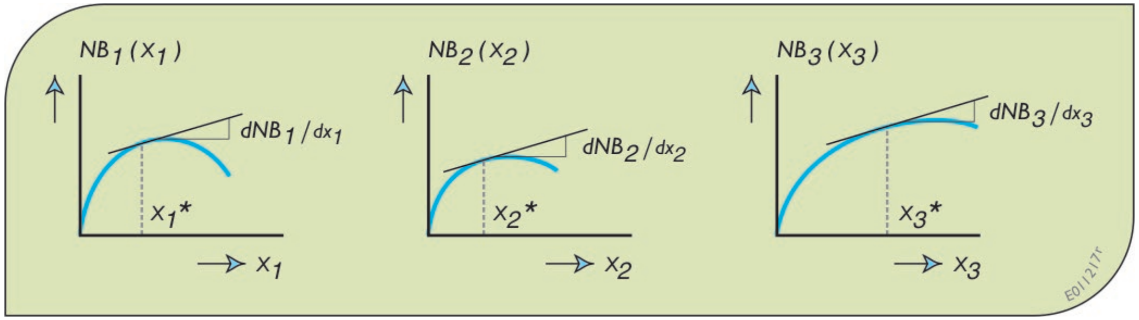


Drei Indifferenzkurven im Zwei-Güter-Fall.

Die erste partielle Ableitung ist der **Grenznutzen**: $\frac{du(x_1,x_2)}{dx_i} = 0$

Nutzenfunktionen

- Die Nutzenfunktionen verhalten sich wie folgt:

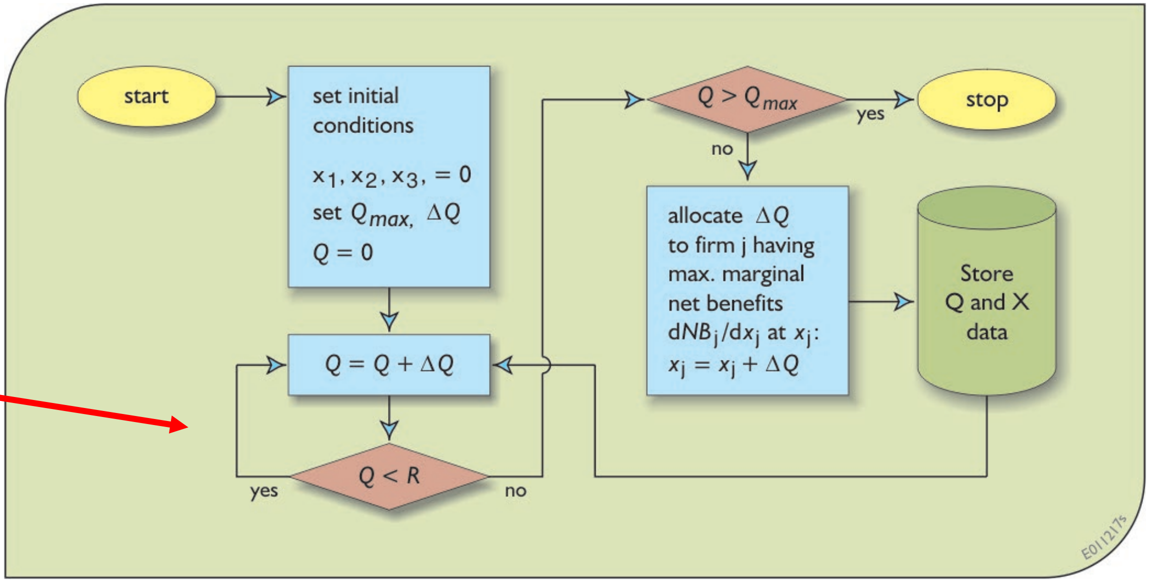


- Maximaler Nutzen, wenn die 1. Ableitung der Nutzenfunktion = 0 → **Grenznutzen**.
- Grenznutzen gibt an, wie viel zusätzlichen Nutzen eine marginale Erhöhung der Menge von Gut x_i stiften würde, mit anderen Gütern unverändert. Ein **Grenznutzen = 0** bedeutet, dass für dieses Gut Sättigung eingetreten ist. Eine weitere Einheit dieses Gutes würde (bei einem konkaven Funktionsverlauf) keinen zusätzlichen Nutzen stiften.
- Grenznutzen ist für Werte von jeweils $x_1 = 3,\ x_2 = 2.33,\ x_3 = 8$ erreicht .
- Grenznutzen für alle Betriebe erfordert insgesamt Wasserzufuhr $x_1 + x_2 + x_3 = 13.33$ Einheiten.

Optimierung nach steilstem Aufstieg („hill-climbing“) (1)

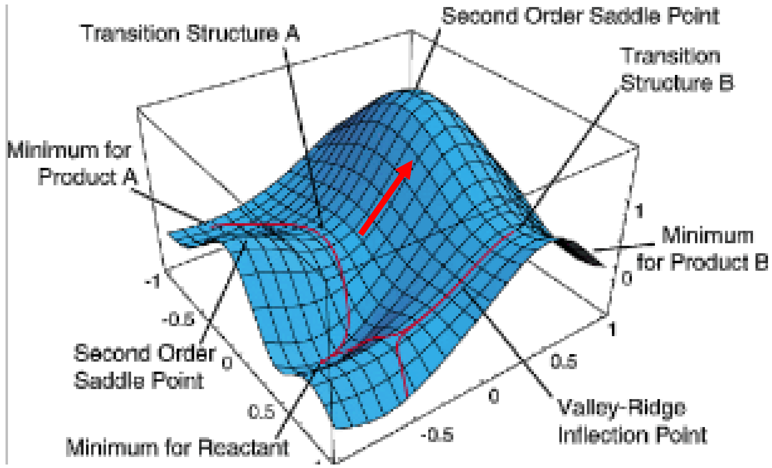
- Restwassermenge $R=2$ Einheiten muss berücksichtigt werden (Bedingung).
- Ein automatisches Rechenverfahren erhöht die Wasserentnahme um ΔQ Einheiten, ausgehend von $x_i=0$.
- Das Wasser wird dem Nutzer zugeteilt, der Maximalen Nutzen erzielt, nämlich für den dNB_j/dx_j in x_j maximal ist.

Prüfe Restwassermenge



Optimierung nach „steilstem Anstieg“ (2)

- Beim Hill-Climbing Algorithmus wird eine n-dimensionale Oberfläche so analysiert, dass immer für den Betrieb der lokal die steilste Nutzenfunktion aufweist, eine Abflusskorrektur vorgenommen wird.
- Dies entspricht dem Erklimmen eines Gipfels auf einer n-dimensionale Oberfläche, wobei der Aufstieg von der steilsten Seite her erfolgt.
- Dadurch wird der Gesamtnutzen des Systems der 3 Betriebe am effizientesten optimiert.



Rechenbeispiel

Anfangsbedingung

Das Verfahren wird angewandt, wobei im ersten Fall ein Q_{max} Wert im Fluss als 8 Einheiten und die Restwassermenge als 2 angenommen wird. Die stufenweise Zunahme $\Delta Q=1$.

Im zweiten Fall wird Q_{max} im Fluss als 20 und die Restwassermenge als 2 Einheiten angenommen. Die stufenweise Zunahme ΔQ wird in immer kleineren Schritten ausgeführt.

Die Zuteilung erfolgt entlang des steilsten Gradienten im Raum $\{x_1,x_2,x_3\}$.

Das Verfahren führt nur zu einem absoluten Maximum oder Minimum, wenn die Nutzenfunktionen konkav sind.

Komplexere Funktionen können aber multiple **lokale Extreme** enthalten.

E020820g

$Q_{max} = 8$; $Q_i = 0$; $\Delta Q = 1$; river flow $R \geq \min\{Q, 2\}$

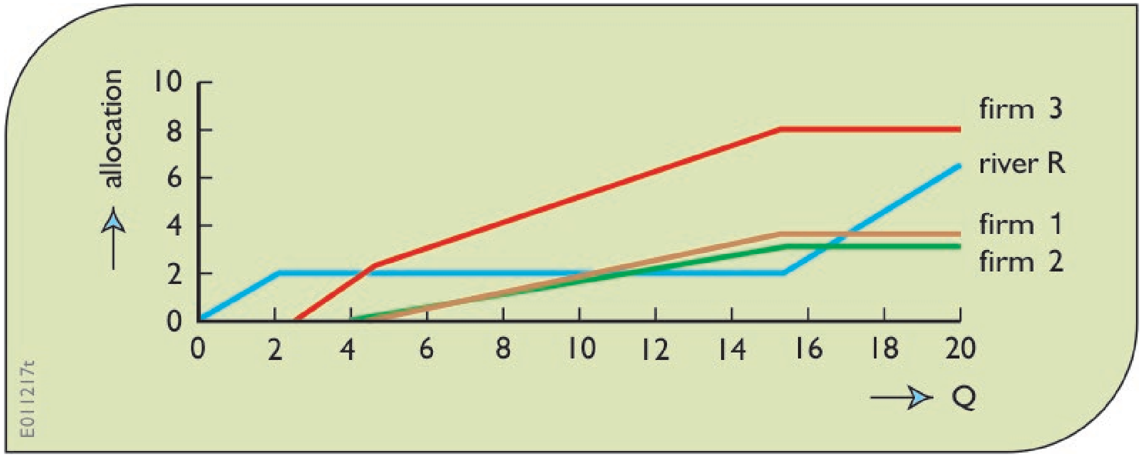
iteration i	Q_i	allocations. R, x_j				marginal net benefits			$Q_i + \Delta Q$	new allocations				total net benefits
		R	x_1	x_2	x_3	$6\text{-}2x_1$	$7\text{-}3x_2$	$8\text{-}x_3$		R	x_1	x_2	x_3	$\Sigma_j NB_j(x_1)$
1–3	0-2	0–2	0	0	0	6	7	8	3	2	0	0	1	7.5
4	3	2	0	0	1	6	7	7	4	2	0	0	2	14.0
5	4	2	0	0	2	6	7	6	5	2	0	1	2	19.5
6	5	2	0	1	2	6	4	6	6	2	0	1	3	25.0
7	6	2	0	1	3	6	4	5	7	2	1	1	3	30.0
8	7	2	1	1	3	4	4	5	8	2	1	1	4	34.5
9	8	2	1	1	4	4	4	4	–	–	–	–	–	---

$Q_{max} = 20$; $\Delta Q \longrightarrow 0$; river flow $R \geq \min\{Q, 2\}$ selected values of Q

Q	allocations. R, x_j				marginal net benefits			total net benefits
	R	x_1	x_2	x_3	$6\text{-}2x_1$	$7\text{-}3x_2$	$8\text{-}x_3$	$\Sigma_j NB_j(x_1)$
0–2	0–2	0	0	0	6	7	8	0.0
4	2	0	0.25	1.75	6.00	6.25	6.25	14.1
5	2	0.18	0.46	2.36	5.64	5.64	5.64	20.0
8	2	1.00	1.00	4.00	4.00	4.00	4.00	34.5
10	2	1.55	1.36	5.09	2.91	2.91	2.91	41.4
15	2	2.91	2.27	7.82	0.18	0.18	0.18	49.1
20	6.67	3.00	2.33	8.00	0	0	0	49.2

Synthese

- Das Ergebnis des Optimierungsverfahrens kann in folgendem Graph synthetisch dargestellt werden:



- Für maximale Werte von Q_{max} im Fluss (blau) werden die Wasserzuteilungen für die Betriebe 1 (beige) , 2 (grün), und 3 (rot), die zu maximalen Nutzen führen, als lineare Funktionen abgebildet.
- Aufgrund dieser Graphik können optimale Bewirtschaftungsregeln erstellt werden.

Verfahren der Lagrange Multiplikatoren

- Im Fall nicht konkaver Funktionen müssen alternative Verfahren angewandt werden um optimale Lösungen in Problemstellungen des Flussgebietsmanagement zu finden.
- Voraussetzung ist immer, dass das Problem in mathematischen Termen durch eine **Zielfunktion** (Objective Function) ausgedrückt werden kann.
- Ein vielfach angewandtes, mathematisches Verfahren sind die **Lagrange Multiplikatoren**.
- Dieses Verfahren wird auch in anderen Bereichen angewandt, wo es darum geht Maxima bzw. Minima einer Funktion zu finden, die an **Bedingungen** geknüpft ist.
- Vorteil ist, dass man mit diesem Verfahren auch Fälle behandeln kann, in denen die Zielfunktion multiple Maxima oder Minima aufweist (lokale und absolute Maxima/ Minima).

Problemstellung

- Ein Herteller *i* stellt ein Produkt her, wobei der Nettonutzen N*B*(x_i) bei Wasserzufuhr x_i für den Betrieb von folgenden Faktoren abhängt:

  a) Der Einheitspreis des Produktes, der im Markt erzielt werden kann.

  b) Die Menge an Produkteinheiten, die erzeugt werden können.

- Um das Produkt zu erzeugen ist Wasser erforderlich, das in **begrenzten Mengen** zur Verfügung steht. **Wasserverfügbarkeit** ist somit der begrenzende Faktor im Erzeugungsprozess.
- Beispiele dieser Erzeugungsprozesse sind: Wasserkrafterzeuger, landwirtschaftlicher Betrieb der Wasser zur Bewässerung braucht, Bierbrauerei, …

Wassernutzung

Lebensmittelerzeugung

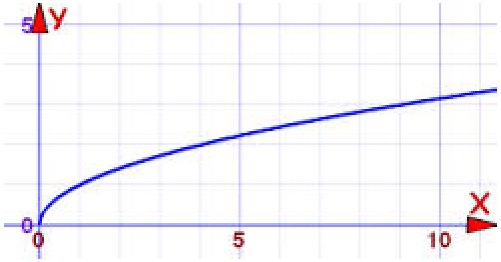
Landbau

Industrie

Wasserkrafterzeugung

Zielsetzungen

- Die Zielsetzungsfunktionen werden zuerst erstellt.
- $p_j(x_j)$ ist die maximale Menge des Produktes p_j (e.g. KWh Strom, Liter Bier, Tonnen Stahl,…) das vom Betrieb *j* mit Hilfe der Wasserzufuhr x_j erzeugt werden kann.
- Die Funktion $p_j(x_j)$ wird *als* Produktionsfunktion bezeichnet. Es handelt sich typischerweise um konkave Funktionen, wobei $dp_j(x_j)/dx_j$ mit der Zunahme von x_j abnimmt, bzw. die Funktion abflacht:



- Je mehr Wasser zur Erzeugung benötigt wird, umso stärker verringert sich die maximal mögliche Produktionsmenge durch den Betrieb, da die Wassermenge durch den maximalen Abfluss begrenzt ist.

Zielsetzungsfunktionen

- Ein Beispiel von 3 **Produktionsfunktionen** für 3 wassernutzende Betriebe, die ihre Produkte mit Zunahme von Wasser aus einem Fluss oder Quelle erzeugen **(*)** :

$$p_1(x_1) = 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$p_2(x_2) = 0.5(x_2)^{0.8}$$

$$p_3(x_3) = 0.6(x_3)^{0.7}$$

- Die mit der Produktion verbundenen Kosten werden durch entsprechende **Kostenfunktionen** für den jeweiligen Betrieb ausgedrückt:

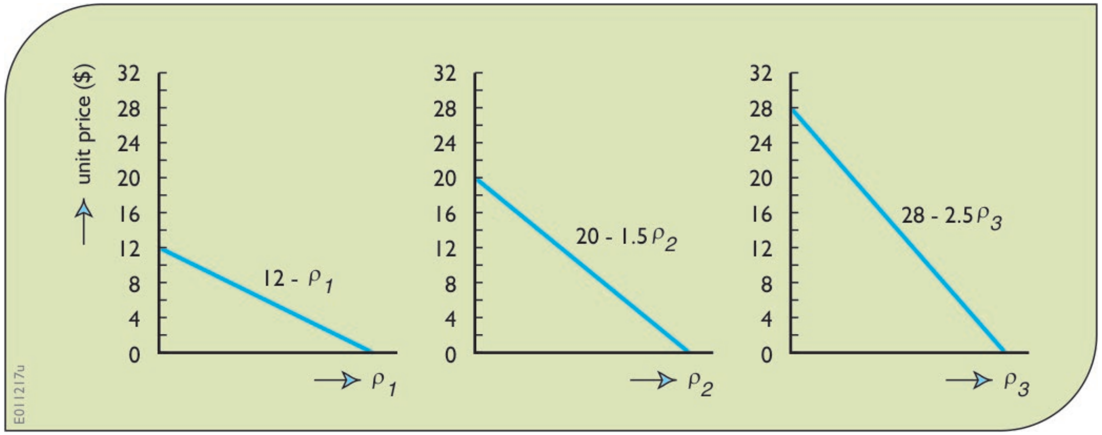
$$C_1(p_1) = 3(p_1)^{1.3}$$

$$C_2(p_2) = 5(p_2)^{1.2}$$

$$C_3(p_3) = 6(p_3)^{1.15}$$

Marktpreis der Produkte

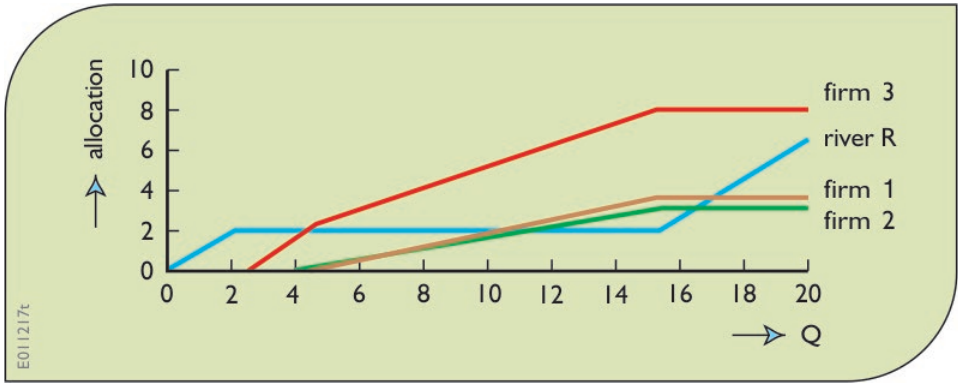
- Jeder der drei Betriebe verkauft seine eigenen Produkte p_j am Markt.
- Der Preis des Produktes muss mit der Anzahl der verkauften Einheiten abnehmen, um im Markt konkurrenzfähig bleiben zu können.
- Aus Marktforschungsanalysen geht hervor, dass i.d.R. der Preis/Einheit für die Zahl an erzeugten/verkauften Einheiten $p(x_j)$ fallen muss, um Konkurrenzfähigkeit zu gewährleisten:



Was wird optimiert?

- Das Optimierungsproblem besteht darin, die Wasserkontingente so zuzuweisen, dass die erzeugte Stückzahl und die Einheitspreise den erzielten Gesamtnutzen für jeden der drei Betriebe **maximieren**.
- Dabei darf die erforderliche Restwassermenge *R* und die zur Produktion erforderliche Wasserableitung die im Fluss zur Verfügung stehende Wassermenge *Q* nicht überschreiten.
- Ziel ist eine **Bewirtschaftungsregel**, welche die Produktion für jeden Betrieb als Funktion des zur Verfügung stehenden Wassers *Q* und der festgelegten Restwassermenge ausdrückt.

Beispiel einer Bewirtschaftungsregel



Zielfunktion

- Die Funktion, die den Gesamtnutzen für alle drei Betriebe darstellt, muss darum maximiert werden. Diese ist wie folgt zusammengesetzt:

Gesamtnettonutzen = Gesamtbruttonutzen – Produktionskosten

- In mathematischen Termen ausgedrückt:

Erzielter Marktpreis

Produktion

- Gesamtbruttonutzen:

$$(12-p_1)\,p_1+(20-1.5p_2)\,p_2+(28-2.5p_3)\,p_3$$

- Produktionskosten:

$$3p_1^{1.3}+5p_2^{1.2}+6p_3^{1.15}$$

- Gesamtnettonutzen:

$$NB=(12-p_1)\,p_1+(20-1.5p_2)\,p_2+(28-2.5p_3)\,p_3-3p_1^{1.3}-5p_2^{1.2}-6p_3^{1.15}$$

Produktionsgrenzen

- Die **Produktionsfunktionen (*)** bestimmten das Verhältnis aus Wasserzuweisung und der Produktion p_j für den jeweiligen Hersteller (= Ressourcenbegrenzung)

$$p_1 \leq 0.4\left(x_1\right)^{0.9}$$

$$p_2 \leq 0.5\left(x_2\right)^{0.8}$$

$$p_3 \leq 0.6\left(x_3\right)^{0.7}$$

- Dabei gilt die Bedingung, dass Restwassermenge *R* und Allokation x_j an den Abfluss *Q* geknüpft sind:

$$R + x_1 + x_2 + x_3 \leq Q$$

Dieses Modell muss nach p_j gelöst werden, wobei der Nettonutzen für die drei Betriebe maximiert wird.

Lösungsansatz

- Eine erste Lösung kann gefunden werden, wenn angenommen wird, dass es eine **unbegrenzte Verfügbarkeit** der Wassermenge *Q* im Fluss gibt.
- In diesem Fall wird jedem Betrieb die Wassermenge zugeordnet, die er benötigt um den maximalen möglichen Nutzen zu erzielen.
- Dieser wird durch die Differenzierung des Gesamtnettonutzens aller Betriebe aufgrund deren individueller Produktion ermittelt:

$$\frac{\partial NB}{\partial p_1} = 0 = 12 - 2p_1 - 1.3(3)p_1^{0.3}$$

$$\frac{\partial NB}{\partial p_2} = 0 = 20 - 3p_2 - 1.2(5)p_2^{0.2}$$

$$\frac{\partial NB}{\partial p_3} = 0 = 28 - 5p_3 - 1.15(6)p_3^{0.15}$$

Fall 1: Unbegrenzte Wasserverfügbarkeit

- Die Ableitung führt zu folgenden Produktionswerten, an denen die Produktion unter unbegrenzter Wasserzufuhr maximal ist:

$$p_1 = 3.2 \rightarrow \text{Einheitspreis } 08.77 \rightarrow x_1 = 10.2$$

$$p_2 = 4.0 \rightarrow \text{Einheitspreis } 13.96 \rightarrow x_2 = 13.6$$

$$p_3 = 3.9 \rightarrow \text{Einheitspreis } 18.23 \rightarrow x_3 = 14.5$$

$$\text{Gesamtnutzen: } 155.75$$

$$\text{totaler Wasserverbrauch: } 38.3$$

- Wenn der Durchfluss Q geringer ist als 38.3 Einheiten, wird einer bzw. alle Betriebe unterversorgt und können damit den größten möglichen Nutzen nicht erzielen (**nächste Folie**).

Fall 2: Begrenzte Wasserverfügbarkeit

- Im Fall **begrenzter Verfügbarkeit**, kann der maximale Nutzen für ein oder mehrere Betriebe nicht erreicht werden.
- In diesem Fall steht den Betrieben eine Wassermenge *Q-R* zur Verfügung, z.B. die gesetzlich vorgeschriebene Restwassermenge muss in jedem Moment gewährleistet werden.
- Wenn die verfügbare Wassermenge geringer als *38.3+R* beträgt, dienen folgende 4 Gleichungen als Bedingungen, die jederzeit gewahrt werden müssen:

$$p_1 - 0.4\left(x_1\right)^{0.9} = 0 \quad (1)$$

$$p_2 - 0.5\left(x_2\right)^{0.8} = 0 \quad (2)$$

$$p_3 - 0.6\left(x_3\right)^{0.7} = 0 \quad (3)$$

$$R + x_1 + x_2 + x_3 - Q = 0 \quad (4)$$

Lagrange Multiplikatoren

- Die Gleichungen, die die Bedingungen ausdrücken, sind neutral (Wert gleich null) und können darum zur Gleichung des Gesamtnutzens *NB* aller drei Betriebe addiert werden.
- Daraus gibt sich eine Lagrange‘sche Zielfunktion *L*:

$$L = \left[\left(12 - p_1\right)p_1 + \left(20 - 1.5p_2\right)p_2 + \left(28 - 2.5p_3\right)p_3\right] - \left[3p_1^{1.3} + 5p_2^{1.2} + 6p_3^{1.15}\right] -$$
$$-\lambda_1\left[p_1 - 0.4\left(x_1\right)^{0.9}\right]$$
$$-\lambda_2\left[p_2 - 0.5\left(x_2\right)^{0.8}\right]$$
$$-\lambda_3\left[p_3 - 0.6\left(x_3\right)^{0.7}\right]$$
$$-\lambda_4\left[R + x_1 + x_2 + x_3 - Q\right]$$

L ist der numerisch Wert der Lagrange‘schen Form der Zielfunktion.
Die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sind die Lagrange Multiplikatoren.

Minimierung der Lagrange‘schen Zielfunktion

- Die Funktion *L* kann nun nach 10 verschiedenen Variablen differenziert werden: p_1, p_2, p_3, x_1, x_2, x_3, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$
- Man erhält ein nicht-lineares Gleichungssystem von 10 Gleichungen und 10 Unbekannten.
- Das System kann iterativ gelöst werden und führt zur optimierten Lösung der Wasserallokationsfrage.

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 = 12 - 2p_1 - 1.3(3)p_1^{0.3} - \lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 = 20 - 3p_2 - 1.2(5)p_2^{0.2} - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_3} = 0 = 28 - 5p_3 - 1.15(6)p_3^{0.15} - \lambda_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = \lambda_1 0.9 \cdot 0.4\left(x_1\right)^{-0.1} - \lambda_4$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = \lambda_2 0.8 \cdot 0.5\left(x_2\right)^{-0.2} - \lambda_4$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 = \lambda_3 0.7 \cdot 0.6\left(x_3\right)^{-0.3} - \lambda_4$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 = p_1 - 0.4\left(x_1\right)^{0.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 = p_2 - 0.5\left(x_2\right)^{0.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 = p_3 - 0.6\left(x_3\right)^{0.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 0 = R + x_1 + x_2 + x_3 - Q$$

Rechenbeispiel

- In unten anstehender Tabelle wird ein Rechenbeispiel mit den entsprechenden Lösungswerten für verschiedene Werte *Q-R* (netto Wasserverfügbarkeit) gezeigt.

water available	allocations to firms 1	2	3	product productions 1	2	3	lagrange multipliers marginal net benefits			
Q-R	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
10	1.2	3.7	5.1	0.46	1.44	1.88	8.0	9.2	11.0	2.8
20	4.2	7.3	8.5	1.46	2.45	2.68	4.7	5.5	6.6	1.5
30	7.5	10.7	11.7	2.46	3.34	3.37	2.0	2.3	2.9	0.6
38	10.1	13.5	14.4	3.20	4.00	3.89	0.1	0.1	0.1	0.0
38.3	10.2	13.6	14.5	3.22	4.02	3.91	0	0	0	0

E020820h

Interpretation

- Die λ_i Parameter sind die Randwerte der Zielfunktion *L*.
- Die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die Veränderungsraten der Zielfunktion bei sich ändernder Erzeugung an Stückzahlen der jeweiligen Produkte p_1, p_2, p_3.
- Der Parameter λ_4 ist die Veränderungsrate der Zielfunktion bei Änderung des zur Verfügung stehenden Wassers, *Q-R*.
- Mit zunehmendem verfügbarem Wasser nimmt der marginalen Nutzen für die jeweiligen Betriebe ab, was in den abnehmenden Werten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 zu erkennen ist.
- Der Nettovorteil jedes Betriebes, aufgrund der erzeugten Stückzahlen p_j und abhängig vom verfügbaren Wasser x_j, sind konkave Funktionen dieser Variablen.

water available	allocations to firms			product productions			lagrange multipliers marginal net benefits			
	1	2	3	1	2	3				
Q-R	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
10	1.2	3.7	5.1	0.46	1.44	1.88	8.0	9.2	11.0	2.8
20	4.2	7.3	8.5	1.46	2.45	2.68	4.7	5.5	6.6	1.5
30	7.5	10.7	11.7	2.46	3.34	3.37	2.0	2.3	2.9	0.6
38	10.1	13.5	14.4	3.20	4.00	3.89	0.1	0.1	0.1	0.0
38.3	10.2	13.6	14.5	3.22	4.02	3.91	0	0	0	0

Allgemeine Formulierung

- Die Formulierung eines Optimierungsproblems durch eine Lagrange'sche Zielfunktion kann beliebig generalisiert und erweitert werden.
- Eine beliebige Funktion $F\left(\vec{X}\right)$ wird minimiert bzw. maximiert, wobei folgende *n* Bedingungen eingehalten werden müssen:

$$g_1\left(\vec{X}\right) = b_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$g_n\left(\vec{X}\right) = b_n$$

- Die Lagrange'sche Zielfunktion $L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}\right)$:

$$L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}\right) = F\left(\vec{X}\right) - \sum_i \lambda_i \left(g_i\left(\vec{X}\right) - b_i\right)$$

Differenzierung

- Die Lösung des Problems reduziert sich auf die Differenzierung der Lagrange'schen Zielfunktion nach den einzelnen Entscheidungs- bzw. Steuervariablen x_j und den Multiplikatoren der Bedingungsfunktionen λ_j.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1}\left(\vec{X}\right)=0 \\ &\cdots\cdots \\ &\frac{\partial L}{\partial x_m}\left(\vec{X}\right)=0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\text{Steuer- bzw. Entscheidungsvariablen}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\left(\vec{X}\right)=0 \\ &\cdots\cdots \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_n}\left(\vec{X}\right)=0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\text{Multiplikatoren der Bedingungsfunktionen}}$$

Interpretation der Multiplikatoren

- Man differenziert *L* nach x_i

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(\vec{X}\right)=0=\frac{\partial F}{\partial x_i}-\sum_i \lambda_i \frac{\partial g\left(\vec{X}\right)}{\partial x_i}$$

- und multipliziert anschließend mit ∂x_{i} und erhält das Differential von *F:* $\partial F=\sum_i \lambda_i \partial g\left(\vec{X}\right)$
- und dividiert dann weiter durch das differential $\partial \mathrm{b}_k$ der Bedingungsfunktion $g_i\left(\vec{X}\right)$:

$$\frac{\partial F}{\partial b_k}-\sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i\left(\vec{X}\right)}{\partial b_k}=\lambda_k$$

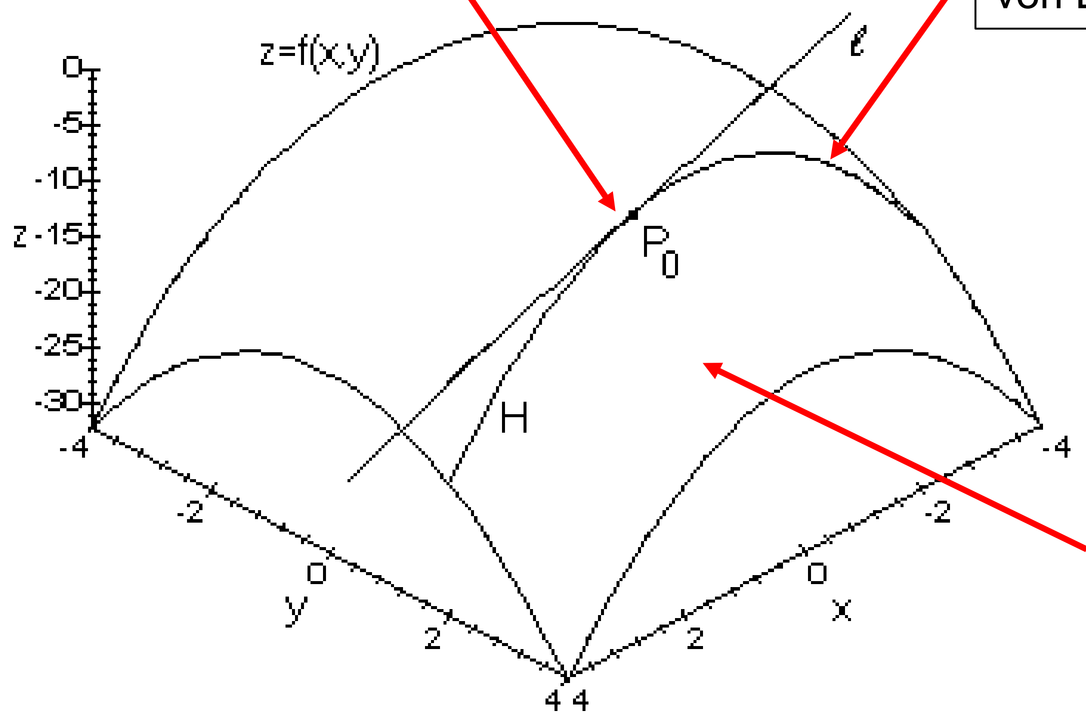
- wobei gilt, dass $\frac{\partial g_i\left(\vec{X}\right)}{\partial b_k}=0 \text{ für } i\neq k \text{ und } \frac{\partial g_i\left(\vec{X}\right)}{\partial b_k}=1 \text{ für } i=k$

da $\partial g\left(\vec{X}\right)=\partial b_i$

Fläche im n-dimensionalen Raum

Lokale Neigung der Tangente

Marginale Veränderung von L in Richtung x



L in 2D Raum (x, y)

Fazit

- Lagrange' schen Multiplikatoren stellen die **marginalen Veränderungen** der Zielfunktion *L* bei sich änderndem Wert der Bedingungsfunktion b_j dar.
- Die Zielfunktion *L* stellt eine Fläche in einem n-dimensionalen Raum dar.
- Bei (multi)-linearen Bedingungsfunktionen ist λ_j eine Konstante und gleich dem Neigungskoeffizienten der Zielfunktion *L* bei sich veränderndem b_j Wert entlang der Dimension *j*.
- Bei nicht-linearen Bedingungsfunktionen ist λ_j die lokale Neigung der Tangenten zu der Zielfunktion *L* für einen spezifischen Wert von b_j entlang der Dimension *j*.

Dynamische Programmierung

- **Dynamische Programmierung** ist eine Methode zum algorithmischen Lösen von Optimierungsproblemen.
- Der Begriff wurde in den 1940er Jahren von dem amerikanischen Mathematiker Richard Bellman eingeführt, der diese Methode auf dem Gebiet der Regelungstheorie anwandte. In diesem Zusammenhang wird auch oft von *Bellmans Prinzip der dynamischen Programmierung* gesprochen.
- Dynamische Programmierung kann dann erfolgreich eingesetzt werden, wenn das Optimierungsproblem aus vielen gleichartigen Teilproblemen besteht, und eine optimale Lösung des Problems sich aus optimalen Lösungen der Teilprobleme zusammensetzt. Dies nennt man Optimalitätsprinzip von Bellman.

fwu

Quelle: wikipedia.org/wiki/Dynamische_Programmierung

Vorteile der dynamischen Programmierung

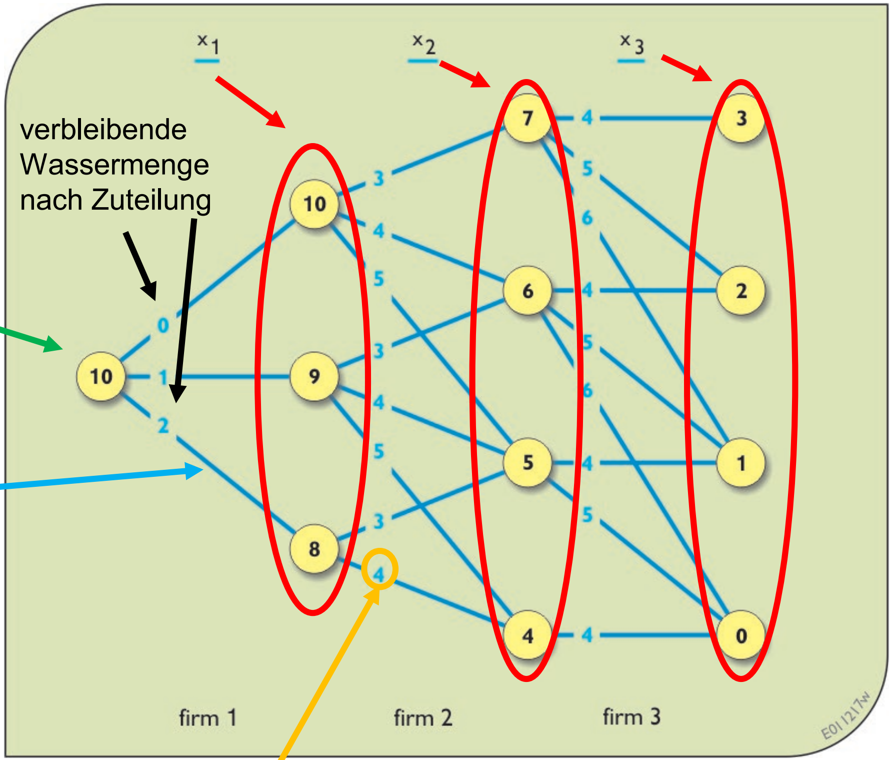
- In der dynamischen Programmierung werden zuerst die optimalen Lösungen der kleinsten Teilprobleme direkt berechnet und dann geeignet zu einer Lösung eines nächstgrößeren Teilproblems zusammengesetzt.
- Dieses Verfahren setzt man fort, bis das ursprüngliche Problem gelöst wurde.
- Dynamische Programmierung kann bei Optimierungsproblemen eingesetzt werden, wo die Zielfunktionen oder Bedingungen keine stetigen Funktionen sind und darum Verfahren wie die Lagrange Multiplikatoren zu keiner optimalen Lösung führen.
- Wird die dynamische Programmierung konsequent eingesetzt, vermeidet sie kostspielige Rekursionen, weil bekannte Teilergebnisse wiederverwendet werden.

fwu

Quelle: wikipedia.org/wiki/Dynamische_Programmierung

Netze in dynamischer Programmierung

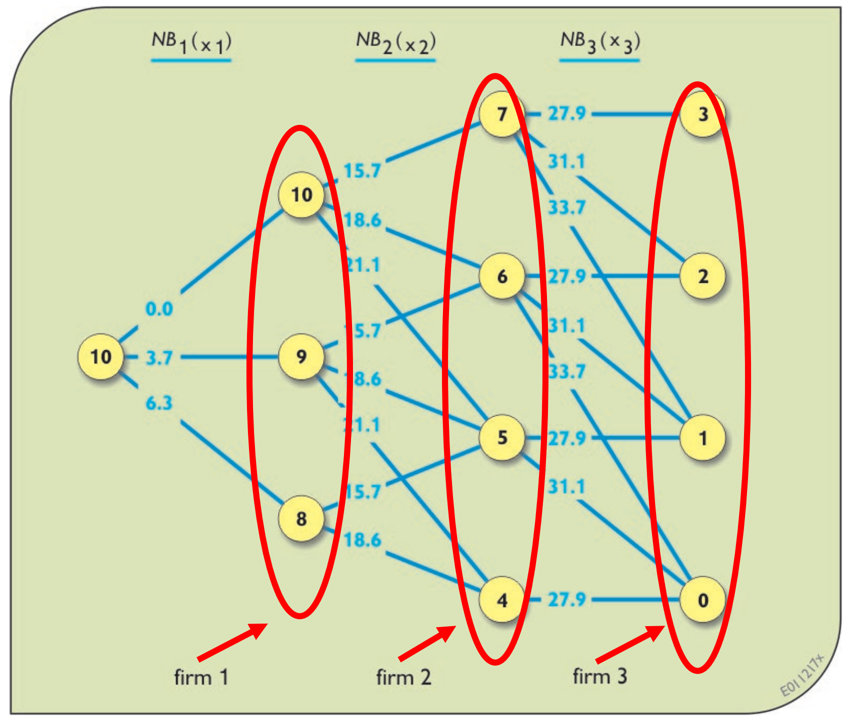
- Modelle auf Basis der dynamischen Programmierung enthalten 1) Zustände, 2) Abschnitte und 3) Entscheidungen.
- Die Zusammenhänge werden durch Netzwerke angegeben.
- Im Netzwerk werden die Zustände als Knoten dargestellt. Gruppen von Knoten bezeichnen einen Abschnitt und die Wasserverteilung, die durch Verbindungsstriche zwischen Knoten angegeben wird, eine Entscheidung.
- Der Zustand links von einer Verbindung ist der Zustand vor der Entscheidung, und der Zustand rechts jener nach der Entscheidung.
- Der jeweilige Zustand ist die verbleibende Wassermenge, die zur Verteilung zur Verfügung steht.



Annahme: Wasserverteilung in Schritten ganzer Zahlen (0,1,2,3,4,….)

Beispiel der Wasserzuordnung

- Die Verbindungslinien stellen nun die netto Nutzen der jeweiligen Wasserzuordnung dar.
- Jeder Abschnitt entspricht einer Firma
- Die Knoten sind die diskreten Werte der verbleibenden zu verteilenden Wassermenge.
- Die Verbindungselemente sind mögliche Wasserzuordnungs-entscheidungen.
- Die Ziffern auf den Verbindungselementen sind die erzielten Nettovorteile für den jeweiligen Nutzer.



$$NB_1(x_1) = \max[(12 - p_1)\, p_1 - 3 p_1^{1.3}]; \qquad p_1 \le 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$NB_2(x_2) = \max[(20 - 1.5 p_2)\, p_2 - 5 p_2^{1.2}]; \qquad p_2 \le 0.5(x_2)^{0.8}$$

$$NB_3(x_3) = \max[(28 - 2.5 p_3)\, p_3 - 6 p_3^{1.15}]; \qquad p_3 \le 0.6(x_3)^{0.7}$$

Lösung

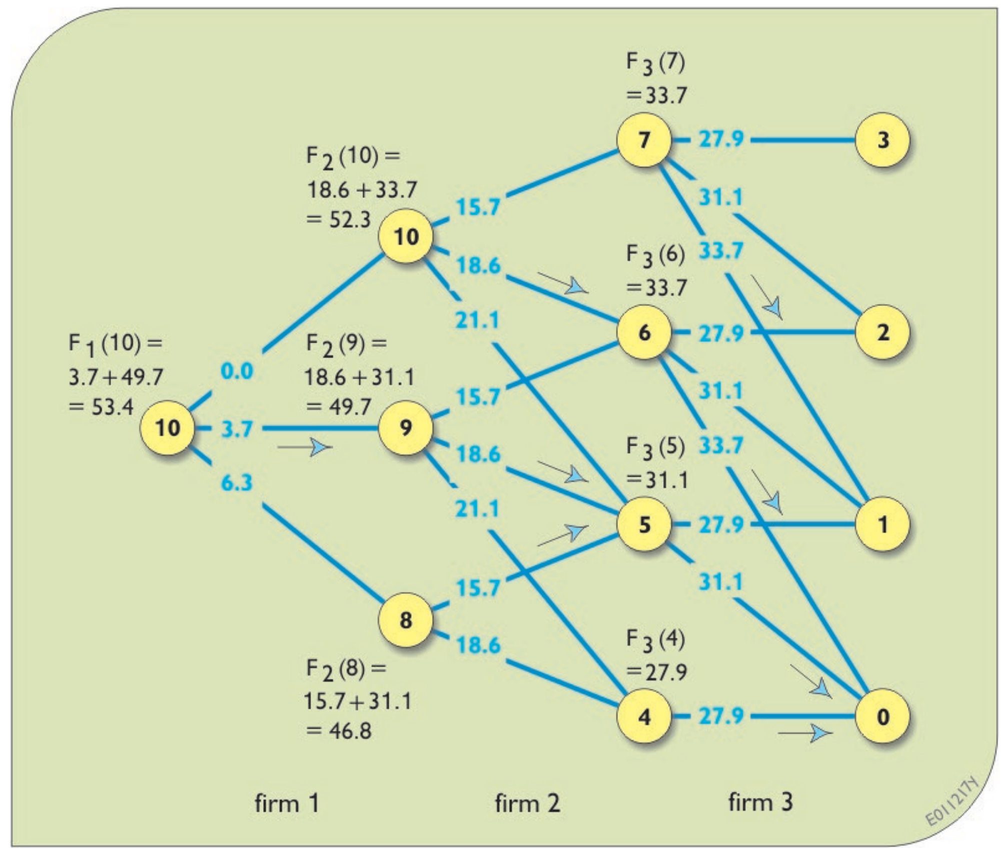
- Die Lösung des Problems besteht darin, den Gesamtnutzen für alle Betriebe zu maximieren:

$$\max \sum_{j=1}^{3} NB_j\left(x_j\right)$$

- Die Lösung wird über verschiedene Abschnitte angestrebt: erst wird das Wasser für einen Betrieb zugeordnet, danach für die zwei anderen. Im Ganzen gibt es drei Abschnitte denen jeweils einer der 3 Betriebe zugeordnet wird.
- Ziel ist es, den **optimalen Weg durch das Netz zu finden**, sodaß der Gesamtnutzen des Systems maximiert wird.
- Man unterschiedet zwischen einem „Vorwärts“ und einem „Rückwärts“ Lösungsverfahren.

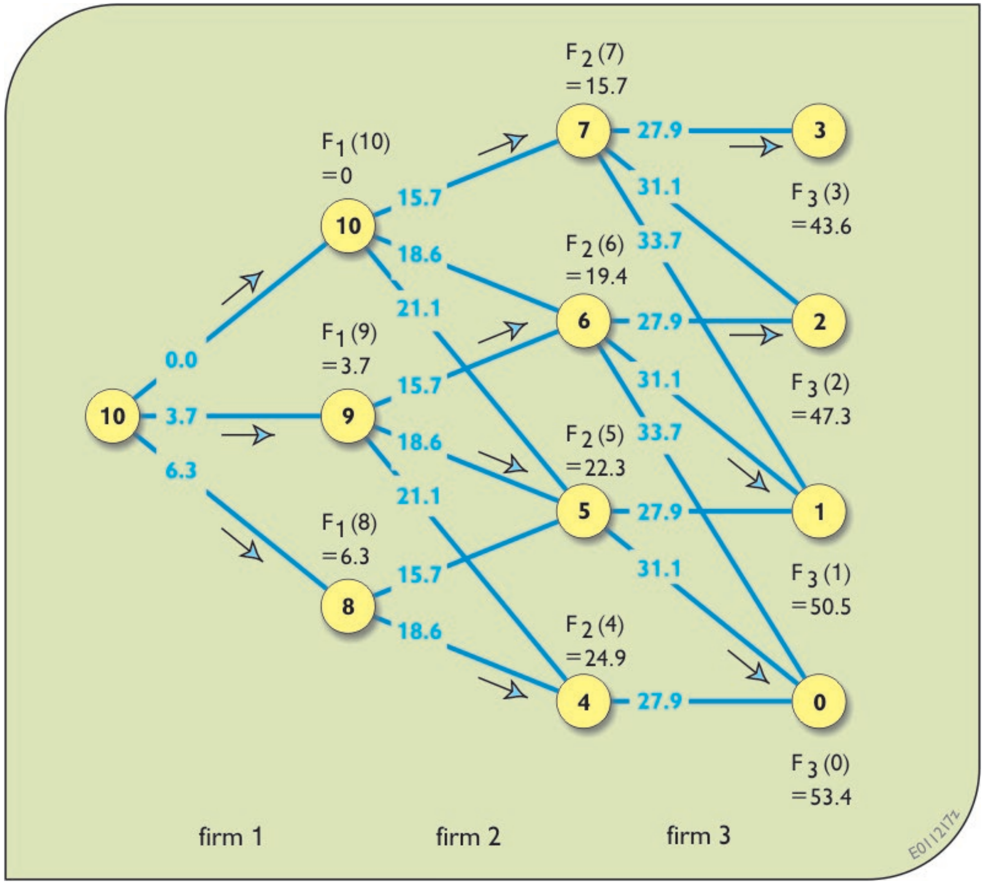
Beispiel eines Rückwärts Lösungsverfahrens

- Die Pfeile zeigen den optimalen Weg durch das Netzwerk an.
- Optimierung beginnt rechts und führt durch das Netz zur optimalen Lösung, i.e. zur Maximierung des Gesamtnutzens.
- Man geht davon aus, dass Wasser an Firma 1 und 2 bereits zugeteilt worden ist und optiert für die Maximierung des Nutzens für Firma 3, i.e. F_3.
- Dieser wird aus allen möglichen F_3 Werten identifiziert ($F_3(7)$, $F_3(6)$, $F_3(5)$, $F_3(4)$).
- Dann wird rückwärts übergegangen zu den Zuteilungen für Firma 2. Der maximale Nutzen $F_2 + F_3$ wird identifiziert.
- Am Ende wird der maximale Nutzen für Firma 1 identifiziert, wobei $F_1 + F_2 + F_3$ maximiert werden.



Beispiel eines Vorwärts Lösungsverfahrens

- Das vorwärts Lösungsverfahren ist analog zum vorhergehenden, nur dass die optimale Lösung ausgehend von Firma 1 (links im Bild) gefunden wird.
- Ziel ist es immer den maximalen GesamtnettoNutzen für alle 3 Firmen zu erzielen.



Zusammenfassung

- Gegenstand der Vorlesung sind Optimierungsverfahren für die Anwendungen im Umgang von Wasserressourcen in einem Einzugsgebiet.
- Verschiedene Nutzer benötigen Teile der verfügbaren Wasserressourcen.
- Es wurde versucht eine Wasserverteilung und die damit zusammenhängende Produktivität in ein mathematisches Problem zu gießen.
- Dabei wird eine Zielfunktion definiert, die den Gesamtnettovorteil für eine Gruppe von Industriebetrieben ausdrückt.
- Diese Zielfunktion wurde durch ein mathematisches Verfahren maximiert.
- Zur Anwendung kommen das Verfahren der Optimierung nach Steilstem Verlauf („Hill Climbing"), das Verfahren der Lagrange Multiplikatoren und die dynamische Programmierung.

Literaturhinweise

- Esogbue, A.O. (1989), Dynamic programming for optimal water resources systems analysis, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.
- Hall, W.A. and Dracup, J.A. (1979), Water Resources Systems Engineeringg, New York, McGraw-Hill.
- Karamouz, M. Zinsser, W.K. and Szidarowsky, F. (2003), Water Resources Systems Analysis, Boca Raton (FL).
- Loucks, D.P., Stiedinger, J.S. and Haith, D.A. (1981), Water Resources Systems planning and analysis, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.
- Major, D.C. and Lenton, R.L. (1979), Applied water resources systems planning and analysis, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.
- Richard Bellman (1957): *Dynamic Programming*. Princeton University Press.


Sie sind mit Fragen willkommen!