

Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen am Stab

- Normalspannung: $\sigma = \frac{N}{A}$ (a)

- Hookesches Gesetz: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (b)

(linear-elastisches
Materialverhalten)

- Dehnungen: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (c)

(Verhältnis der Längen-
änderung Δl zur Aus-
gangslänge l)

Aus (a), (b) und (c) folgt: $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$

- Dehnung aus Kraft: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

- Dehnung aus Temperaturänderung: $\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$

- Gesamtdehnung: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T$

- Gesamtspannung: $\sigma = E \cdot (\varepsilon - \alpha_T \cdot \Delta T)$

Differentialgleichung des Stabes

▪ Kinematische Beziehung (Kinematik): $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ (1)

▪ Elastizitätsgesetz (Material): $\sigma = E \cdot (\varepsilon - \alpha_T \cdot \Delta T)$ (2)

▪ Gleichgewichtsbedingung: $\frac{dN}{dx} + n = 0$ (3)

Aus (1) in (2) folgt

$$\sigma = E \cdot \left(\frac{du}{dx} - \alpha_T \cdot \Delta T \right)$$

und mit $\sigma = \frac{N}{A}$ für die Normalkraft im Stab

$$\begin{aligned} N(x) &= EA \cdot \left(\frac{du}{dx} - \alpha_T \cdot \Delta T \right) \\ &= EA \cdot (u'(x) - \alpha_T \cdot \Delta T) \end{aligned} \quad (4)$$

bzw. ohne Temperaturänderung ($\Delta T = 0$)

$$N(x) = EA \cdot u'(x)$$

(4) in (3) eingesetzt

$$(EA \cdot u'(x))' = -n + (EA \cdot \alpha_T \cdot \Delta T)'$$

und ohne Temperaturänderung ($\Delta T = 0$) sowie $EA = \text{const.}$ folgt die Differentialgleichung des Stabes

$$EA \cdot u''(x) = -n(x)$$

Begriffe

σ	-	Normalspannung
N	-	Normalkraft
A	-	Querschnittsfläche
E	-	Elastizitätsmodul
ε	-	Dehnung
Δl	-	Längenänderung
l	-	Ausgangslänge des Stabes
α_T	-	Wärmeausdehnungskoeffizient
ΔT	-	Temperaturänderung
$u(x)$	-	Verformung in Längsachse des Stabes
$n(x)$	-	Streckenlast in Richtung der Längsachse des Stabes
EA	-	Dehnsteifigkeit des Stabes
$\frac{du}{dx} = u'(x)$	-	Ableitung der Verformungsfunktion u nach x