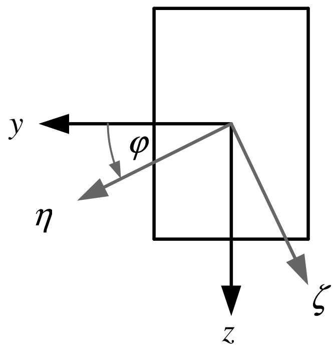
Transformationsbeziehungen

$$I_\eta = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos(2\varphi) + I_{yz}\sin(2\varphi)$$

$$I_\zeta = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos(2\varphi) - I_{yz}\sin(2\varphi)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin(2\varphi) + I_{yz}\cos(2\varphi)$$



Hauptträgheitsmomente

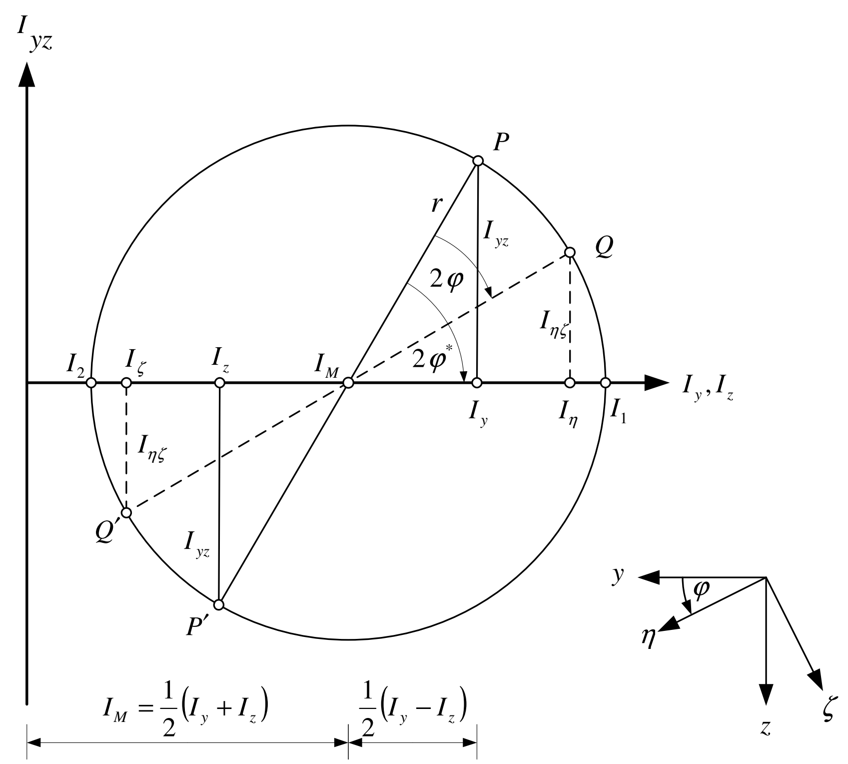
$$I_1 = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\right]^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\right]^2 + I_{yz}^2}$$

$$\tan\left(2\varphi^*\right) = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z}$$

MOHRscher Trägheitskreis

Mittelpunkt: $I_M = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right)$ Radius: $r = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\right]^2 + I_{yz}^2}$



Konstruktion des MOHRschen Trägheitskreis

Der MOHRsche Trägheitskreis lässt sich einfach und ohne Berechnung mit Hilfe der axialen Trägheitsmomente I_y, I_z und des Deviationsmomentes I_{yz} konstruieren.

Zuerst trägt man den Punkt P mit den Koordinaten $\left(I_y, I_{yz} \right)$ und den Punkt P' mit den Koordinaten $\left(I_z, -I_{yz} \right)$ in das dargestellte Koordinatensystem ein (Die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sind betragsmäßig immer positiv. Das Deviationsmoment I_{yz} wird vorzeichengerecht über I_y und mit umgekehrten Vorzeichen über I_z aufgetragen). Die Verbindungslinie der beiden Punkte liefert einen Schnittpunkt mit der I_y, I_z-Achse, den Kreismittelpunkt I_M. Der Kreis lässt sich jetzt mit dem Radius r zeichnen.

Jeder der Punkte auf dem MOHRschen Trägheitskreis gehört zu einem Schnitt durch den Punkt unter einem bestimmten Winkel.

Der Punkt P gehört zu dem Schnitt parallel zur z-Achse, in diesem Schnitt wirken die Flächenträgheitsmomente I_y und I_{yz}.

Der Punkt Q gehört zu einem Schnitt parallel zur ξ-Achse, in dem die Flächenträgheitsmomente I_η und $I_{\eta\xi}$ wirken. Das η, ξ-Koordinatensystem ist im Vergleich zum y, z-Koordinatensystem um den Winkel φ gedreht, siehe Abbildung.

Im Trägheitskreis hingegen wird immer der **doppelte Winkel in entgegengesetzter Richtung** angetragen.

In den Schnitten unter den Winkeln φ^* und $\varphi^* + \frac{\pi}{2}$ werden die axialen Flächenträgheitsmomente extremal und das Deviationsmoment verschwindet gleichzeitig. In diesem Fall erhält man die maximalen und minimalen Flächenträgheitsmomente I_1 und I_2. Die zugehörigen Achsen werden Hauptachsen genannt und mit 1 (maximales Trägheitsmoment) und 2 (minimales Trägheitsmoment) bezeichnet.

Ein Sonderfall liegt vor, wenn die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2 gleich groß sind. Dann wird der MOHRsche Trägheitskreis zu einem Punkt und alle Richtungen sind Hauptachsen mit jeweils dem gleichen Flächenträgheitsmoment. Dies ist beispielsweise bei quadratischen oder kreisrunden Querschnitten der Fall.