

## Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

$$\delta W = \delta \Pi$$

Bei einer virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist die Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Arbeit der inneren Kräfte (Formänderungsenergie).

- $\delta W$  : virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte  
 $\delta \Pi$  : virtuelle Formänderungsenergie  
 $\delta(\cdot)$  : Variation einer Größe ( $\cdot$ )

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) ist eine *Gleichgewichtsaussage* (*Gleichgewicht*). PvV wird auch als *Prinzip der virtuellen Verrückungen* oder *Prinzip der virtuellen Arbeit* bezeichnet.

Virtuelle Verschiebungen sind Verschiebungen oder Verdrehungen, die

- gedacht (d.h. in Wirklichkeit gar nicht vorhanden),
- differentiell klein,
- geometrisch möglich (d.h. mit den Bindungen des Systems verträglich)

sind. Virtuelle Verschiebungen sind beliebig wählbar. In der Regel werden sie zu  $\bar{1}$  gesetzt.

**Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W$  im PvV:**

$$\delta W = -F \cdot \bar{1} \quad \text{für eine Kraft } F$$

$$\delta W = -M \cdot \bar{1} \quad \text{für ein Moment } M$$

Dabei wird die virtuelle Verschiebung bzw. Verdrehung in entgegengesetzter Richtung zur Kraft  $F$  bzw. zum Moment  $M$  angebracht.

**Virtuelle Formänderungsenergie  $\delta \Pi$  im PvV:**

	Zug/Druck	Biegung	Querkraft	Torsion
$\delta \Pi$	$\int N \delta \epsilon dx$	$\int M \delta \psi' dx$	$\int V \delta \bar{\gamma} dx$	$\int M_T \delta \phi' dx$

**Sonderfälle:**

- 1.) **Starrkörper:** Keine Formänderung  $\rightarrow \delta \Pi = 0$
  - 2.) **Bewegliche oder kinematische Systeme:**  $\delta \Pi = 0$
- In beiden Fällen vereinfacht sich das PvV zu

$$\delta W = 0$$

**Zwei wichtige Anwendungen vom PvV:**

- 1.) Bestimmung der Auflagerreaktionen und diskreten Schnittgrößen
- 2.) Bestimmung der Gleichgewichtslagen

**1.) Bestimmung der Auflagerreaktionen und diskreten Schnittgrößen:**

**Bestimmung der Auflagerreaktionen:**

- Die zu der gesuchten Auflagerreaktion gehörende Lagerung wird entfernt oder mit einem Gelenk modifiziert. Die gesuchte Auflagerreaktion wird angetragen.
- Eine zur gesuchten Auflagerreaktion gehörende virtuelle Verschiebungsgröße  $\delta d = \bar{1}$  wird entgegengesetzt zur gesuchten Auflagerreaktion angebracht.
- Aus  $\delta W = 0$  erhält man die gesuchte Auflagerreaktion.

**Bestimmung der Schnittgrößen (Kraftgrößen):**

- Die Lagerung des Originalsystems wird übernommen.
- Durch den Einbau von Verschiebungsmechanismen (Gelenken) wird die gesuchte Kraftgröße ausgelöst. Sie wird als Doppelgröße an den beiden Schnittufern angetragen.
- Eine zur gesuchten Kraftgröße gehörende virtuelle Verschiebungsgröße  $\delta d = \bar{1}$  wird entgegengesetzt zur gesuchten Kraftgröße angebracht.
- Aus  $\delta W = 0$  erhält man die gesuchte Kraftgröße.

**Virtuelle Verschiebungsmechanismen zu den gesuchten Kraftgrößen**

$m$	Gesuchte Kraftgröße		
	$M_m$	$V_m$	$N_m$
Schnittprinzip (Mechanismus)			
virtuelle Verschiebung $\delta d = \bar{1}$			
	Knickwinkel $\bar{1}$	Sprung $\bar{1}$	Spreizung $\bar{1}$

**2.) Bestimmung der Gleichgewichtslagen:**

- Koordinatensystem einführen.
- Virtuelle Verschiebung bzw. Verdrehung bestimmen.
- Virtuelle Arbeit  $\delta W$  bestimmen.
- Aus  $\delta W = 0$  erhält man die gesuchten Gleichgewichtslagen.

**Rechenregeln für die Variation einer Funktion:**

$$\delta F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x = \frac{dF}{dx} \delta x$$

$$\delta F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \delta x_n$$