

Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

$$\delta\bar{W} = \delta\bar{\Pi}$$

Die bei einer virtuellen Kraftgröße an den wirklichen Verschiebungen geleistete äußere Arbeit und innere Arbeit sind gleich.

$\delta\bar{W}$: virtuelle Komplementärarbeit (Ergänzungsarbeit) der äußeren Kräfte
 $\delta\bar{\Pi}$: virtuelle Komplementärformänderungsenergie (Ergänzungsformänderungsenergie)

Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) ist eine *kinematische Aussage (Kinematik)*. PvK wird auch als *Prinzip der virtuellen Komplementärarbeit* oder *Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit* bezeichnet.

Virtuelle Komplementärarbeit der äußeren Kräfte $\delta\bar{W}$ im PvK:

$$\delta\bar{W} = \bar{1} \cdot d \quad \text{für eine Verschiebung } d$$

$$\delta\bar{W} = \bar{1} \cdot \varphi \quad \text{für eine Verdrehung } \varphi$$

Dabei wird die virtuelle Kraftgröße (Kraft bzw. Moment) in der Regel zu $\bar{1}$ gesetzt und sie wird in Richtung der Verschiebungsgröße (Verschiebung d bzw. Verdrehung φ) angebracht.

Virtuelle Komplementärformänderungsenergie $\delta\bar{\Pi}$ im PvK

	Zug/Druck	Biegung	Querkraft	Torsion
$\delta\bar{\Pi}$	$\int \frac{N \cdot \delta N}{EA} dx$	$\int \frac{M \cdot \delta M}{EI} dx$	$\int \frac{V \cdot \delta V}{GA_s} dx$	$\int \frac{M_T \cdot \delta M_T}{GI_T} dx$
$\delta\bar{\Pi}$	$\int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx$	$\int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx$	$\int \frac{V \cdot \bar{V}}{GA_s} dx$	$\int \frac{M_T \cdot \bar{M}_T}{GI_T} dx$

Bei Fachwerken gilt:

$$\delta\bar{\Pi} = \sum_i \frac{S_i \cdot \bar{S}_i \cdot \ell_i}{(EA)_i}$$

Dabei sind:

N, M, V, M_T, S_i : Schnittgrößen aus den wirklichen äußeren Belastungen




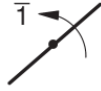
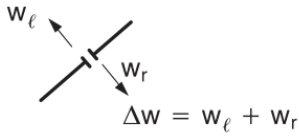
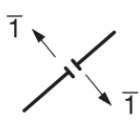
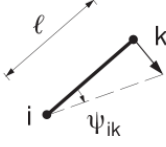

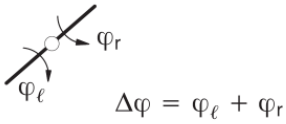
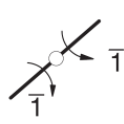
$\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}, \bar{M}_T, \bar{S}_i$: Schnittgrößen aus den virtuellen Kräften $\bar{1}$

Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) können diskrete Verschiebungsgrößen bestimmt werden. Dazu ist die folgende Vorgehensweise erforderlich:

- Eine virtuelle Kraftgröße (Last) $\delta F = \bar{1}$ wird nach Art, Ort und Richtung entsprechend der gesuchten Verschiebungsgröße d angebracht.
- Aus der Arbeitsgleichung $\delta \bar{W} = \delta \bar{\Pi}$ erhält man die gesuchte Verschiebungsgröße

$$\bar{1} \cdot d = \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx + \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx + \int \frac{V \cdot \bar{V}}{GA_s} dx + \int \frac{M_T \cdot \bar{M}_T}{GI_T} dx$$

Virtuelle Kraftgrößen zu den gesuchten Verschiebungsgrößen

Gesuchte Verschiebungsgrößen d	Virtuelle Kraftgröße (Last) δF
Verschiebungskomponente 	
Verdrehung 	
Differenzverschiebung 	
Stabdrehwinkel 	
Differenzverdrehung 	

Bemerkung:

Bei konstanten EA und EI kann die Auswertung der Integrale mit der Integral- bzw. Koppeltafel durchgeführt werden.
 Zum Beispiel

$$\int_0^\ell \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell M \cdot \bar{M} dx = \frac{1}{EI} \cdot \ell \cdot \text{Tafelwert}$$