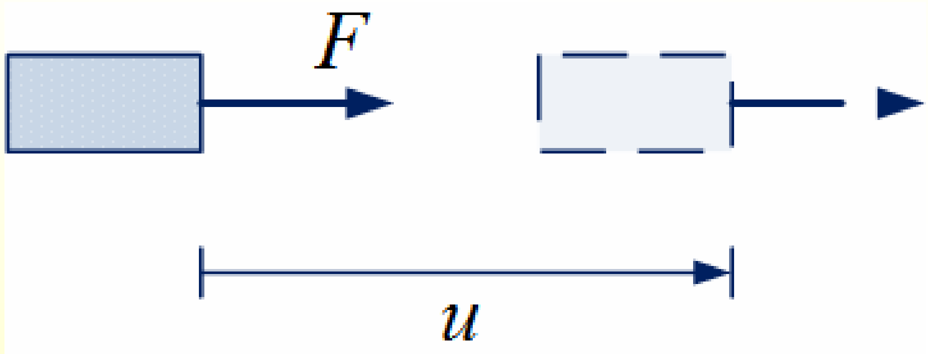
6. Arbeitssatz, Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) und Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Arbeit:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

$$W = F \cdot u$$



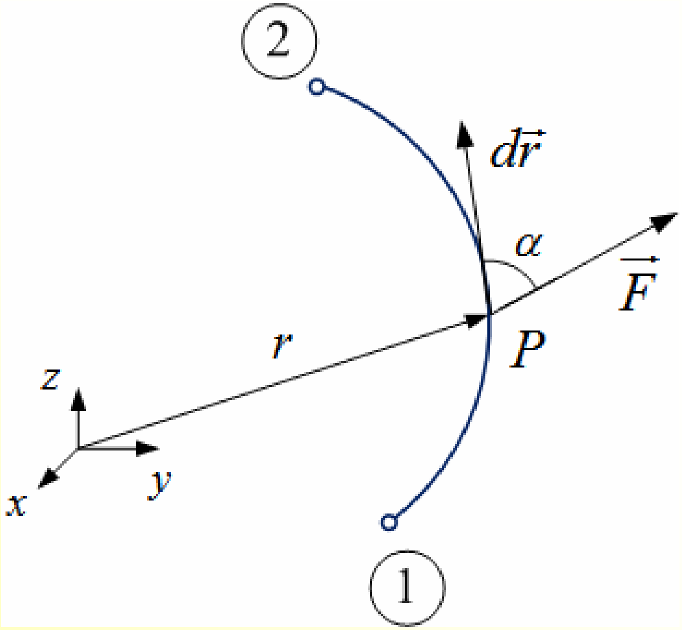
Einheit: Joule = J = N · m (James Prescott Joule, Physiker, 1818–1889)

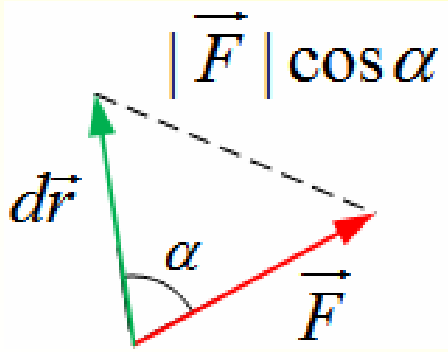
6.1 Grundbegriffe und Arbeitssatz

Verallgemeinerung:

1.) Arbeit eines Kraftvektors

$d\vec{r}$ – infinitesimale Verschiebung





$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha$$

Gesamte Arbeit:

$$W = \int_{①}^{②} dW = \int_{①}^{②} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

6.1 Grundbegriffe und Arbeitssatz

2.) Arbeit eines Momentenvektors

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$$W = \int dW = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$$\vec{\varphi} - \text{Drehvektor}$$

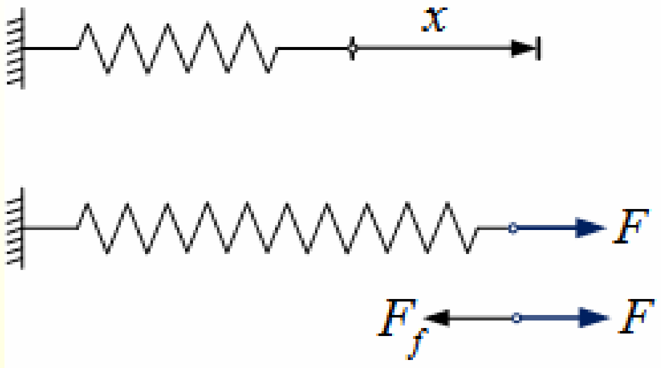
Konservative Kräfte:

Kräfte, deren Arbeit nicht von der Bahn abhängt, nennt man **konservative Kräfte**.
Konservative Kräfte lassen sich aus einen Potential Π ableiten:

$$\Pi = -W = -\int \vec{F} d\vec{r}$$

6.1 Grundbegriffe und Arbeitssatz

Beispiel 1:

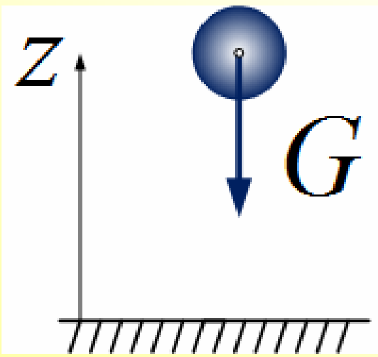


$$\Pi_f = \frac{1}{2} c\, x^2$$

$$W_f = -\int_0^x F_f\, d\bar{x} = -\int_0^x c\bar{x}\, d\bar{x} = -\frac{1}{2} c\, x^2$$

$$F_f = \frac{\partial \Pi_f}{\partial x} = -c\, x$$

Beispiel 2: Gewichtskraft

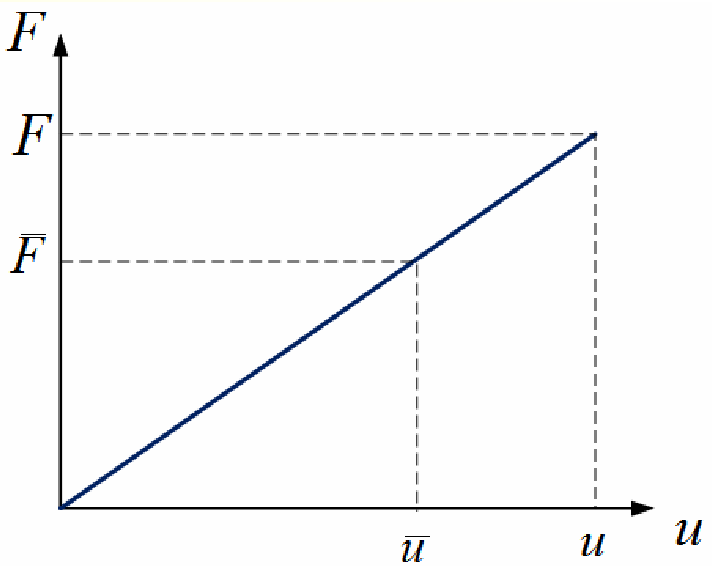


$$\Pi(z) = -W = G \cdot z$$

$$-\frac{d\Pi}{dz} = -G$$

($-$: gegen z-Richtung !)

Beispiel 3: Zugstab



$\bar{F}$ wird langsam aufgebracht!

$$\bar{u} = \frac{\bar{F}\cdot\ell}{EA} \quad \Rightarrow \quad \bar{F} = \frac{EA}{\ell}\bar{u}$$

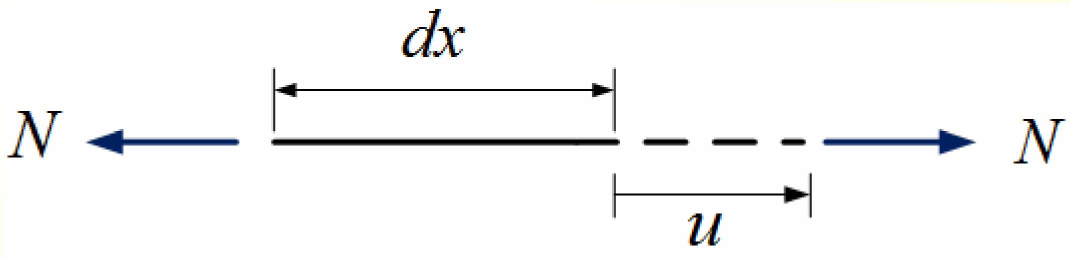
<u>Arbeit der äußeren Kraft:</u>

$$W = \int_0^u \bar{F}(\bar{u})d\bar{u} = \int_0^u \frac{EA}{\ell}\bar{u}\,d\bar{u} = \frac{EA}{\ell}\frac{u^2}{2}$$

mit $u = \frac{F\cdot\ell}{EA}$ $\Rightarrow$ $\boxed{W = \frac{1}{2}F\cdot u}$

6.1 Grundbegriffe und Arbeitssatz

Arbeit der inneren Kraft:



$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$d\Pi = \frac{1}{2} N\,du = \frac{1}{2} N\varepsilon\,dx$$

mit dem Elastizitätsgesetz: $\sigma = E\varepsilon\,dx$, $\Rightarrow$ $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{A}\frac{1}{E}$

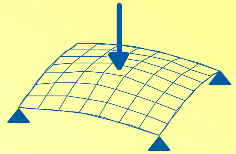
$$d\Pi = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}\,dx = \Pi^*\,dx \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int_0^\ell \Pi^*\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{N^2}{EA}\,dx = \Pi^*\,dx$$

Falls $N = \text{const}$, $EA = \text{const}$, dann

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{F^2\ell}{EA} \qquad (F = N!) \quad \xrightarrow{u = \frac{F \cdot l}{EA}} \quad \boxed{\Pi = \frac{1}{2} F \cdot u}$$

Vergleich von W und Π liefert: $\boxed{W = \Pi}$

Arbeitssatz



Arbeitssatz:

$$W = \Pi$$

Bei einem elastischen System wird die Arbeit der äußeren Kräfte (Lasten) als innere Energie (Formänderungsenergie) gespeichert!

W : Arbeit der äußeren Kräfte

Π : Innere Energie, Formänderungsenergie, Arbeit der inneren Kräfte

Der Arbeitssatz gilt auch für Biegung, Schub und Torsion. Die Formänderungsenergie kann aus der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$\Pi = \int_0^1 \Pi^* dx$$

Arbeitssatz

Formänderungsenergie Π^* pro Längeneinheit (Formänderungsenergiedichte):

Zug/Druck	Biegung	Querkraft	Torsion
$\frac{1}{2} N \varepsilon$	$\frac{1}{2} M \psi'$	$\frac{1}{2} V \overline{\gamma}$	$\frac{1}{2} M_T \varphi'$
$\frac{1}{2} EA\varepsilon^2$	$\frac{1}{2} EI\psi'^2$	$\frac{1}{2} GA_s\overline{\gamma}^2$	$\frac{1}{2} GI_T\varphi'^2$
$\frac{1}{2} \frac{N^2}{EA}$	$\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI}$	$\frac{1}{2} \frac{V^2}{GA_s}$	$\frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GI_T}$

Arbeitssatz

Für die Formänderungsenergie bei Fachwerken gilt:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \frac{S_i^2 \cdot l_i}{(EA)_i}$$

Dabei sind:

ψ : Drehwinkel des Querschnittes

$\bar{\gamma}$: Mittlere Winkeländerung (Verzerrung) $\bar{\gamma} = w' + \psi$ eines Balkenelements

φ : Drehwinkel des Querschnittes infolge Torsion

Arbeitssatz

Falls ein Bauteil mehrere Beanspruchungsarten hat, so darf superponiert werden:
Die gesamte Energie ergibt sich durch Addition der einzelnen Anteile!

Bsp.: Balken unter Zug, Biegung und Torsion

$$\Pi = \int \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}dx + \int \frac{1}{2}\frac{M_T^2}{GI_T}dx \int \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx$$

Der Arbeitssatz kann zur Bestimmung der **Verschiebung des Lastangriffspunktes in Richtung der Kraft** bzw. **Verdrehung in Richtung des Momentes** verwendet werden.

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Der Arbeitssatz gilt auch für virtuelle Arbeit und virtuelle Formänderungsenergie:

$$\delta \mathrm{W} = \delta \Pi$$

δW : virtuelle Arbeit

$\delta \Pi$: virtuelle Formänderungsenergie

$\delta(\cdot)$: Variation einer Größe

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Rechenregeln für die Variation einer Funktion:

$$\delta F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x = \frac{dF}{dx}\delta x$$

$$\delta F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n$$

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Möglichkeiten:

1.) Wirklicher Kraftzustand, virtueller Verschiebungszustand:
Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

$$\delta W = \vec{F}\,\delta\vec{r} \quad \text{oder} \quad \delta W = \vec{M}\,\delta\vec{\varphi}$$

$$\delta\Pi = \int N\delta\varepsilon\, dx$$

2.) Wirklicher Verschiebungszustand, virtueller Kraftzustand:
Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

$$\delta\overline{W} = \vec{r}\;\delta\vec{F} \quad \text{oder} \quad \delta\overline{W} = \vec{\varphi}\,\delta\vec{M}$$

$$\delta\overline{\Pi} = \int \varepsilon\delta N\, dx$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV):

$$\delta W = \delta \Pi$$

Bei einer virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist die Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Arbeit der inneren Kräfte (Formänderungsenergie).

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) ist eine *Gleichgewichtsaussage* (*Gleichgewicht*). PvV wird auch als *Prinzip der virtuellen Verrückungen* oder *Prinzip der virtuellen Arbeit* bezeichnet.

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Virtuelle Verschiebungen sind Verschiebungen oder Verdrehungen, die

- gedacht (d.h. in Wirklichkeit gar nicht vorhanden),
- differentiell klein,
- geometrisch möglich (d.h. mit den Bindungen des Systems verträglich) sind.

Virtuelle Verschiebungen sind beliebig wählbar. In der Regel werden sie zu 1 gesetzt.

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte δW im PvV:

$$\delta W = -F \cdot \overline{1} \quad \text{für eine Kraft } F$$

$$\delta W = -M \cdot \overline{1} \quad \text{für ein Moment } M$$

Dabei wir die virtuelle Verschiebung bzw. Verdrehung in entgegengesetzter Richtung zur Kraft F bzw. zum Moment M angebracht.

Virtuelle Formänderungsenergie $\delta\Pi$ im PvV:

	Zug/Druck	**Biegung**	**Querkraft**	**Torsion**
$\delta\Pi$	$\int N\,\delta\varepsilon\,dx$	$\int M\,\delta\psi'\,dx$	$\int V\,\delta\overline{\gamma}\,dx$	$\int M_T\,\delta\varphi'\,dx$

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

2 Sonderfälle:

1.) Starrkörper: Keine Formänderung $\rightarrow \delta\Pi = 0$

2.) Bewegliche oder kinematische Systeme: $\delta\Pi = 0$

In beiden Fällen vereinfacht sich das PvV zu:

$$\boxed{\delta W = 0}$$

Zwei wichtige Anwendungen vom PvV:

1.) Bestimmung der Auflagerreaktionen und diskreten Schnittgrößen.

2.) Bestimmung der Gleichgewichtslagen.

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

1.) Bestimmung der Auflagerreaktionen und diskreten Schnittgrößen:

Bestimmung der Auflagerreaktionen:

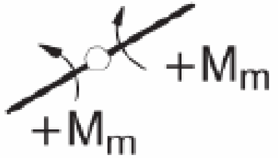
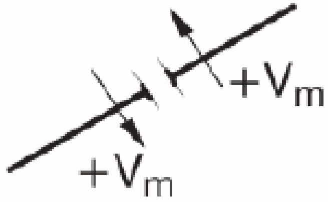
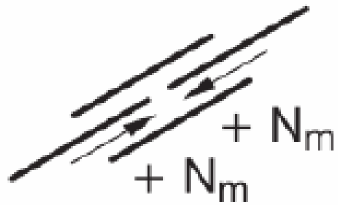
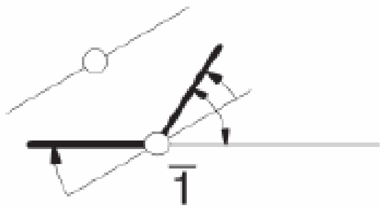
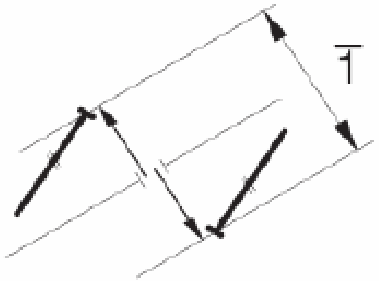
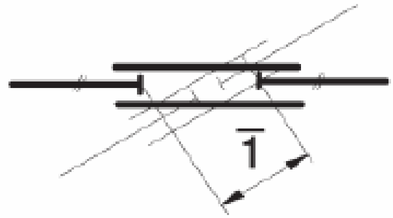
- Die zu der gesuchten Auflagerreaktion gehörende Lagerung wird entfernt oder mit einem Gelenk modifiziert. Die gesuchte Auflagerreaktion wird angetragen.
- Eine zur gesuchten Auflagerreaktion gehörende virtuelle Verschiebungsgröße $\delta d = \overline{1}$ wird entgegengesetzt zur gesuchten Auflagereaktion angebracht.
- Aus $\delta W = 0$ erhält man die gesuchte Auflagerreaktion.

Bestimmung der Schnittgrößen (Kraftgrößen):

- Die Lagerung des Originalsystems wird übernommen.
- Durch den Einbau von Verschiebungsmechanismen (Gelenken) wird die gesuchte Kraftgröße ausgelöst. Sie wird als Doppelgröße an den beiden Schnittufern angetragen.
- Eine zur gesuchten Kraftgröße gehörende virtuelle Verschiebungsgröße $\delta d = \overline{1}$ wird entgegengesetzt zur gesuchten Kraftgröße angebracht.
- Aus $\delta W = 0$ erhält man die gesuchte Kraftgröße.

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

Virtuelle Verschiebungsmechanismen zu den gesuchten Kraftgrößen

	Gesuchte Kraftgröße M_m	Gesuchte Kraftgröße V_m	Gesuchte Kraftgröße N_m
Schnittprinzip (Mechanismus)			
virtuelle Verschiebung $\delta d = \bar{1}$	 Knickwinkel $\bar{1}$	 Sprung $\bar{1}$	 Spreizung $\bar{1}$

6.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)

2.) Bestimmung der Gleichgewichtslagen:

- Koordinatensystem einführen.
- Virtuelle Verschiebung bzw. Verdrehung bestimmen.
- Virtuelle Arbeit δW bestimmen.
- Aus $\delta W = 0$ erhält man die gesuchten Gleichgewichtslagen.

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Bei dem PvK wird eine virtuelle Kraft an der Stelle der gesuchten Verschiebungsgröße in ihrer Richtung verwendet.

Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

$$\boxed{\delta \overline{W} = \delta \overline{\Pi}}$$

Die bei einer virtuellen Kraftgröße an den wirklichen Verschiebungen geleistete äußere Arbeit und innere Arbeit sind gleich.

$\delta \overline{W}$: virtuelle Komplementärarbeit (Ergänzungsarbeit) der äußeren Kräfte

$\delta \overline{\Pi}$: virtuelle Komplementärformänderungsenergie (Ergänzungsformänderungsenergie)

Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) ist eine *kinematische Aussage* (*Kinematik*). PvK wird auch als *Prinzip der virtuellen Komplementärarbeit* oder *Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit* bezeichnet.

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Virtuelle Komplementärarbeit der äußeren Kräfte $\delta\overline{W}$ im PvK:

$$\delta\overline{W} = \overline{1} \cdot d \quad \text{für eine Verschiebung } d$$

$$\delta\overline{W} = \overline{1} \cdot \varphi \quad \text{für eine Verdrehung } \varphi$$

Dabei wird die virtuelle Kraftgröße (Kraft bzw. Moment) in der Regel zu $\overline{1}$ gesetzt und sie wird in Richtung der Verschiebungsgröße (Verschiebung d bzw. Verdrehung φ) angebracht.

Virtuelle Komplementärformänderungsenergie $\delta\overline{\Pi}$ im PvK

	Zug/Druck	**Biegung**	**Querkraft**	**Torsion**
$\delta\overline{\Pi}$	$\int \frac{N \cdot \delta N}{EA} dx$	$\int \frac{M \cdot \delta M}{EI} dx$	$\int \frac{V \cdot \delta V}{GA_S} dx$	$\int \frac{M_T \cdot \delta M_T}{GI_T} dx$
$\delta\overline{\Pi}$	$\int \frac{N \cdot \overline{N}}{EA} dx$	$\int \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx$	$\int \frac{V \cdot \overline{V}}{GA_S} dx$	$\int \frac{M_T \cdot \overline{M}_T}{GI_T} dx$

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Bei Fachwerken gilt:

$$\delta\overline{\Pi} = \sum_i \frac{S_i \cdot \overline{S}_i \cdot l_i}{(EA)_i}$$

Dabei sind:

N, M, V, M_T, S_i : Schnittgrößen aus den wirklichen äußeren Belastungen

$\overline{N}, \overline{M}, \overline{V}, \overline{M}_T, \overline{S}_i$: Schnittgrößen aus den virtuellen Kräften $\overline{1}$

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

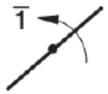
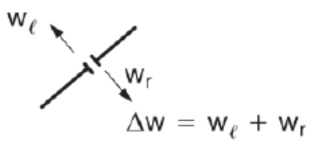
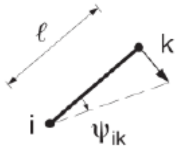
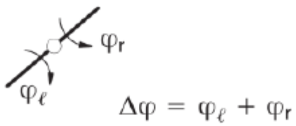
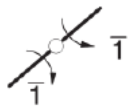
Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) können diskrete Verschiebungsgrößen bestimmt werden. Dazu ist die folgende Vorgehensweise erforderlich:

- Eine virtuelle Kraftgröße (Last) $\delta F = \bar{1}$ wird nach Art, Ort und Richtung entsprechend der gesuchten Verschiebungsgröße d angebracht.
- Aus der Arbeitsgleichung $\delta\bar{W} = \delta\bar{\Pi}$ erhält man die gesuchte Verschiebungsgröße

$$\bar{1} \cdot d = \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx + \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx + \int \frac{V \cdot \bar{V}}{GA_s} dx + \int \frac{M_T \cdot \bar{M}_T}{GI_T} dx$$

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Virtuelle Kraftgrößen zu den gesuchten Verschiebungsgrößen

Gesuchte Verschiebungsgrößen d		**Virtuelle Kraftgröße (Last)** δF
Verschiebungskomponente		
Verdrehung		
Differenzverschiebung		
Stabdrehwinkel		
Differenzverdrehung		

6.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK)

Bemerkung:

Bei konstanten EA und EI kann die Auswertung der Integrale mit der Integral- bzw. Koppeltafel durchgeführt werden.
Zum Beispiel

$$\int_0^{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI}\, dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} M \cdot \bar{M}\, dx = \frac{1}{EI} \cdot \ell \cdot \text{Tafelwert}$$

Zusammenfassung: Arbeitssatz, PvV, PvK

Arbeitssatz

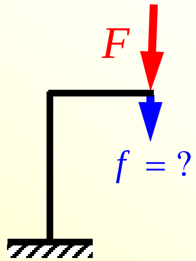
$$W = \Pi$$

PvV

$$\delta W = \delta \Pi$$

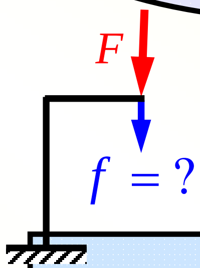
- Auflagerkräfte
- Schnittgrößen
- Gleichgewichtslage

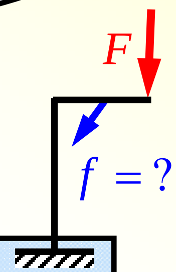
Verschiebungsgrößen
an der Laststelle
in Lastrichtung



PvK

$$\delta \bar{W} = \delta \bar{\Pi}$$





Verschiebungsgrößen
an beliebiger Stelle
in beliebiger Richtung