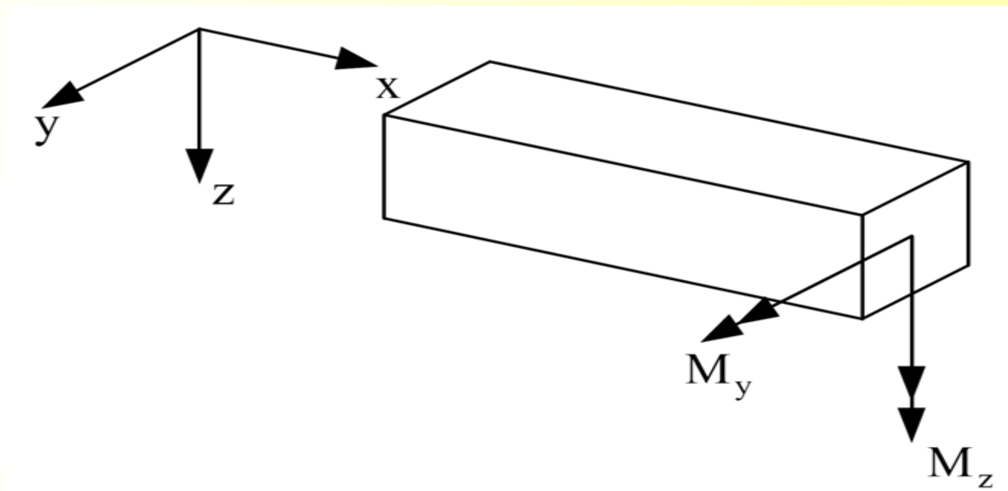
3.2 Grundgleichungen der geraden Biegung

1.) Gleichgewichtsgleichungen (vgl. TM I)

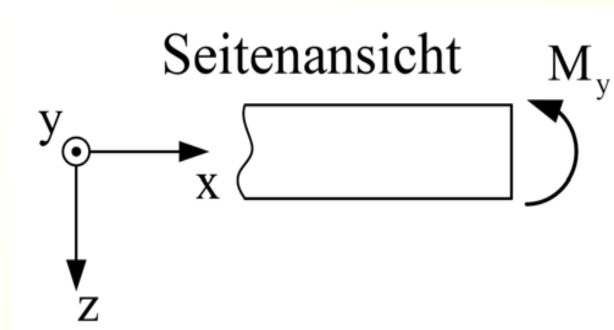
$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -p$$



2.) Elastizitätsgesetz (Hookesches Gesetz)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$



3.) Kinematik

3.2 Grundgleichungen der geraden Biegung

Annahmen:

a.) Die Verschiebung (Durchbiegung) w ist unabhängig von z

$$w = w(x)$$

Alle Punkte eines Querschnittes haben die gleiche Durchbiegung w in z-Richtung. Die Balkenhöhe ändert sich bei der Biegung nicht.

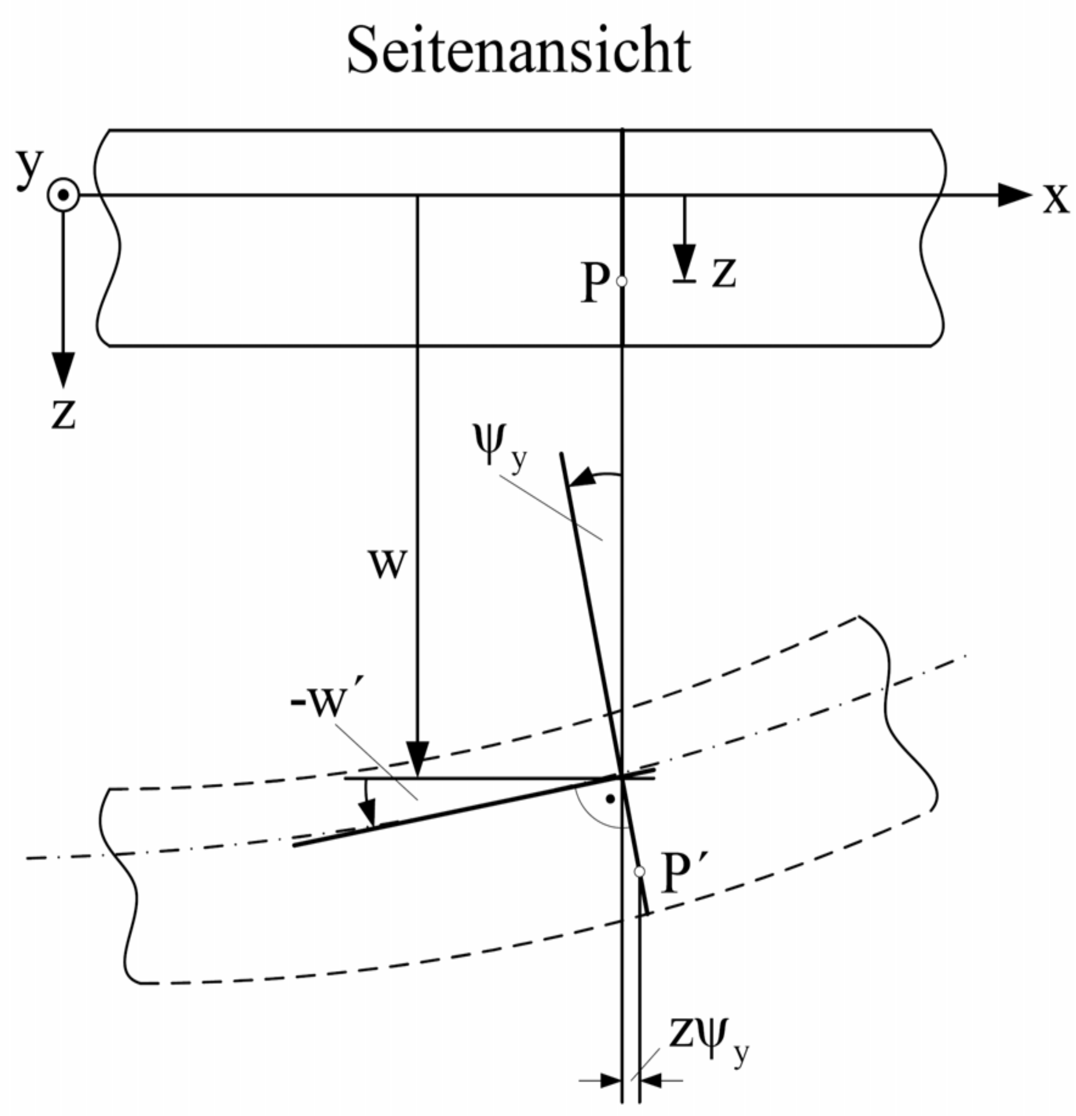
b.) Ebenbleiben der Querschnitte

Ein Querschnitt erfährt eine Durchbiegung w und einen Drehwinkel ψ

c.) Senkrechtbleiben der Querschnitte

Ein Querschnitt bleibt nach der Deformation senkrecht zur deformierten Balkenachse.

Bemerkung: Die Annahmen b.) und c.) werden als Bernoulli-Hypothese bezeichnet (Jacob Bernoulli, 1654-1750).



Zur Vereinfachung:

$$N_x = N$$

$$M_y = M$$

$$V_z = V$$

$$I_y = I$$

$$\psi_y = \psi$$

3.2 Grundgleichungen der geraden Biegung

- **Verschiebung in x-Richtung**

$$u_P = \psi(x) \cdot z$$

- **Drehwinkel**

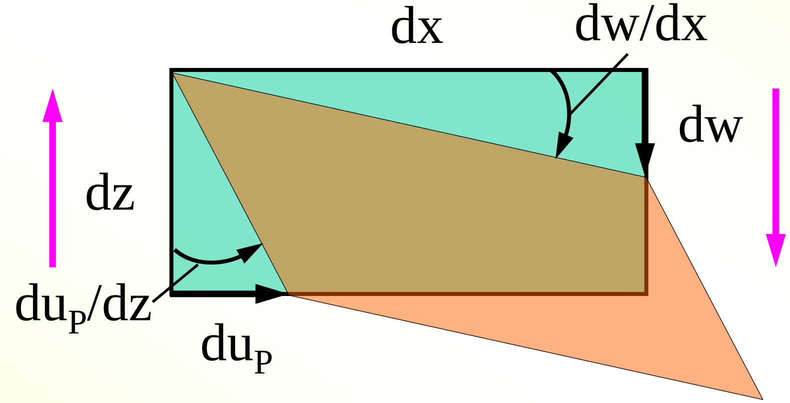
$$\psi(x) = -w'(x)$$

- **Dehnung in x-Richtung**

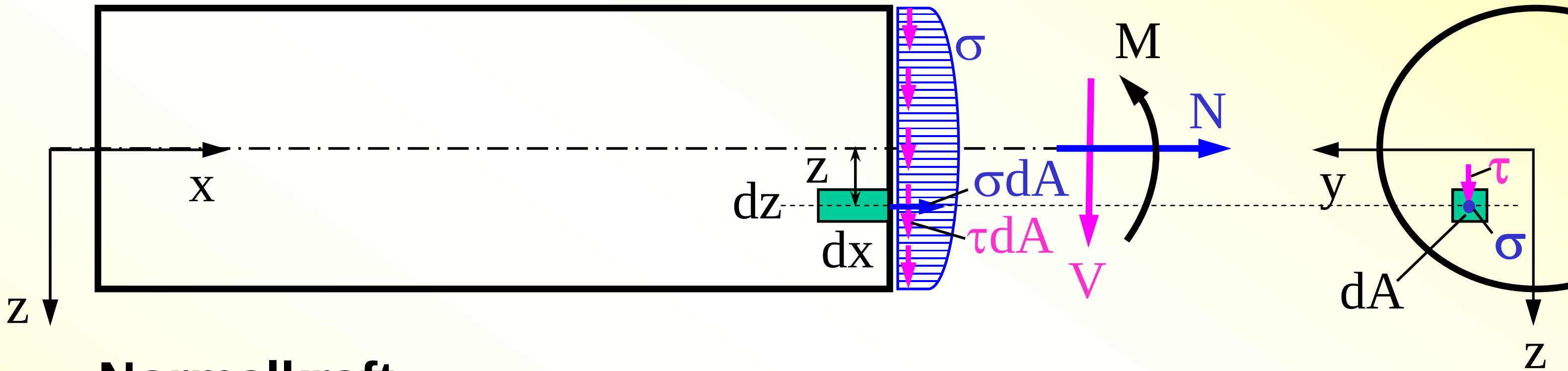
$$\varepsilon = \frac{du_P}{dx} = \psi'(x) \cdot z = -w''(x) \cdot z$$

- **Verzerrung**

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \frac{du_P}{dz} = w' + \psi$$



4.) Schnittgrößen und Spannungen



- **Normalkraft**

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \cdot \varepsilon dA = -E \int_A w'' \cdot z dA = -Ew'' \int_A z dA = -Ew'' S_y = 0$$

(S_y=0 da y-z-Achsen Schwerachsen sind!)

- **Biegemoment**

$$M = \int_A z \cdot \sigma dA = \int_A z \cdot E\varepsilon dA = \int_A z \cdot E \cdot (-w'' \cdot z) dA = -Ew'' \int_A z^2 dA = -EI_y w''$$

3.2 Grundgleichungen der geraden Biegung

- **Querkraft**

$$V = \int_A \tau \, dA = \tau A_s = GA_s \cdot \gamma = GA_s \cdot \overbrace{(w' + \psi)}^{0}$$

Da die Querkraft V nicht verschwindet, muss gelten:

$$GA_s = \infty \quad \text{(schubstarr)}$$

EI :	Biegesteifigkeit
GA_s :	Schubsteifigkeit
$A_s = \kappa A$:	Schubfläche
κ :	Formfaktor

$$M = -EI \cdot w''$$

$$V = M' = -(EI \cdot w'')'$$

$$V' = -(EI \cdot w'')'' = -p$$

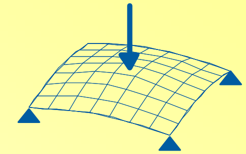
$$\boxed{(EI \cdot w'')'' = p}$$ Differentialgleichung 4. Ordnung

Sonderfall: EI =const.

$$M = -EI \cdot w''$$

$$V = -EI \cdot w'''$$

$$\boxed{EI \cdot w^{IV} = p}$$ Differentialgleichung 4. Ordnung



Zusammenfassung: EI =const.

Differentialgleichung für Biegelinie: $\boxed{EI \cdot w^{IV} = p}$ oder $\boxed{EI \cdot w'' = -M}$

Randbedingungen

Durchbiegung (Biegelinie): $w(x)$

Verdrehung (Neigung der Biegelinie): $\psi(x) = -w'(x)$

Krümmung der Biegelinie: $\kappa(x) = w'' / \left[1 + (w')^2\right]^{3/2} \cong w''(x)$

Normalkraft: $N(x) = 0$

Biegemoment: $M(x) = -EI \cdot w''(x)$

Querkraft: $V(x) = -EI \cdot w'''(x)$

Vorzeichen für Krümmung: