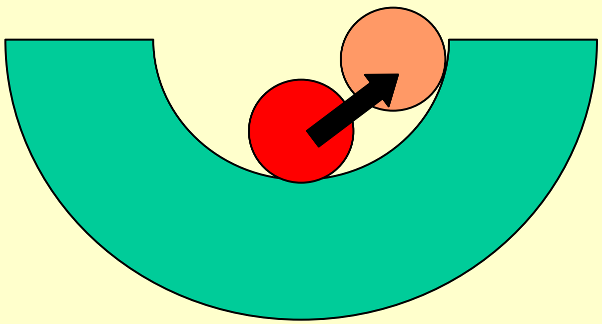
Stabilitätsprobleme

- Arten der Gleichgewichtslagen
- Stabilitätskriterium
- Verzweigungsproblem & Durchschlagsproblem
- Theorie II. Ordnung und Knickgleichung

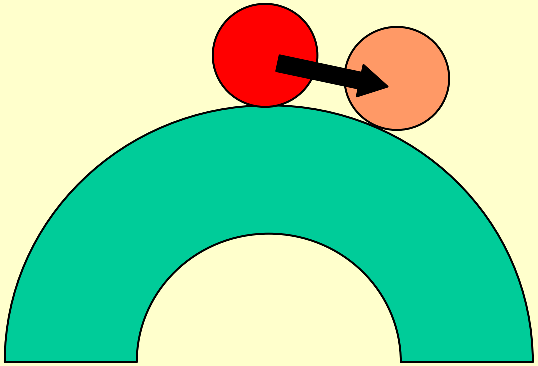
Arten der Gleichgewichtslagen

Ein Tragwerk muss in stabiler Gleichge-
wichtslage sein. Viele Tragwerke versagen wegen struktureller Instabilität, nicht aber wegen Materialversagen.

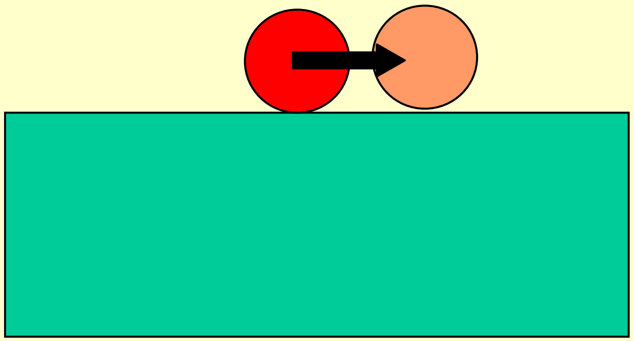
Arten der Gleichgewichtslagen



stabil



instabil



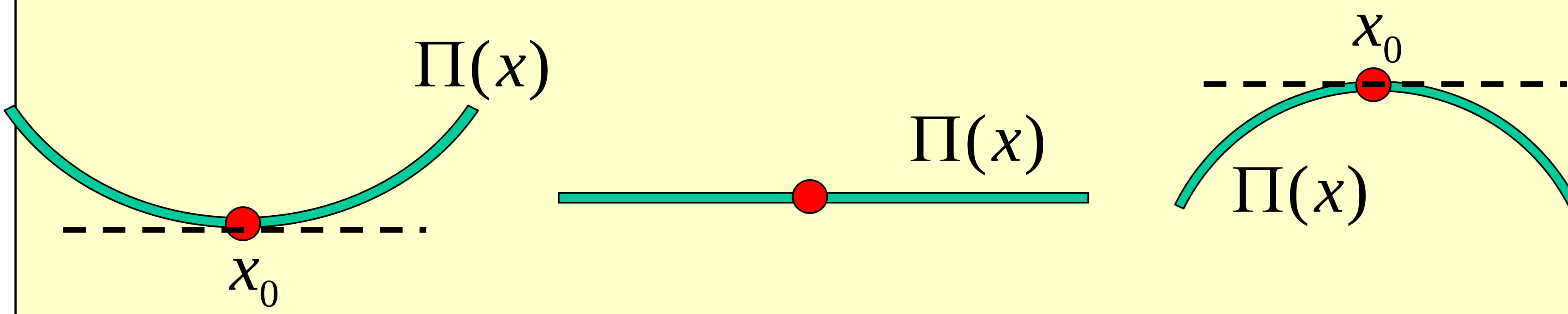
indifferent

Nach einer kleinen Störung kehrt es in seine Anfangslage zurück!

Nach einer kleinen Störung kehrt es nicht in seine Anfangslage zurück!

Ausgelenkte Lage ist ebenfalls eine Gleichgewichtslage!

Stabilitätskriterium



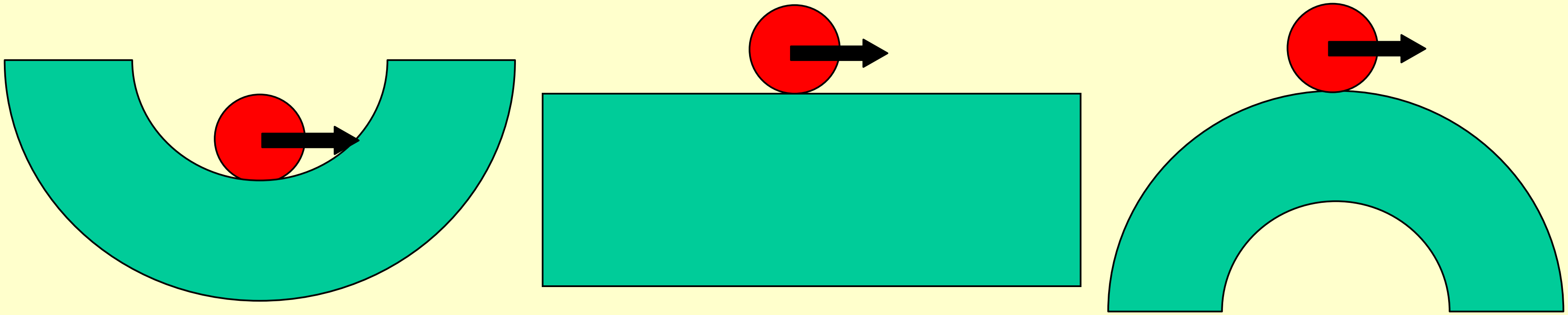
stabil | **indifferent** | **instabil**

$\Pi(x_0) =$ **Minimum** | $\Pi(x) =$ **konst.** | $\Pi(x_0) =$ **Maximum**

Π = **Potentielle Energie des Systems**

Bei einer Gleichgewichtslage hat die Potentialkurve $\Pi(x)$ eine horizontale Tangente!

Stabilitätskriterium



stabil **indifferent** **labil**

$\Pi' = 0 \;\Rightarrow\;$ **Gleichgewichtslagen**

$$\Pi'' \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \;\textbf{stabil} & (\Pi = \textbf{Minimum}) \\ = 0 & \Rightarrow \;\textbf{indifferent} & (\Pi = \textbf{konstant}) \\ < 0 & \Rightarrow \;\textbf{instabil} & (\Pi = \textbf{Maximum}) \end{cases}$$

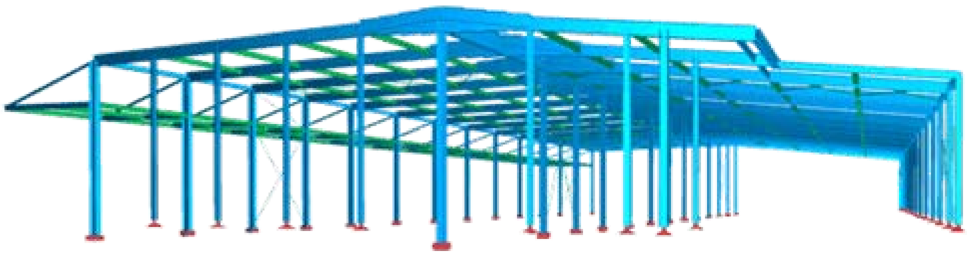
Stabilitätskriterium

Bemerkungen:

Falls $\Pi'' = 0,$ **dann müssen höhere Ableitungen von** Π **untersucht werden.**

Falls alle Ableitungen von Π **gleich Null sind, dann liegt eine indifferente Gleichgewichtslage vor (** $\Pi(x) =$ **konstant)!**

Wann kommt ein Stabilitätsproblem vor?



Stab unter Zug

Last-Verformungskurve eindeutig

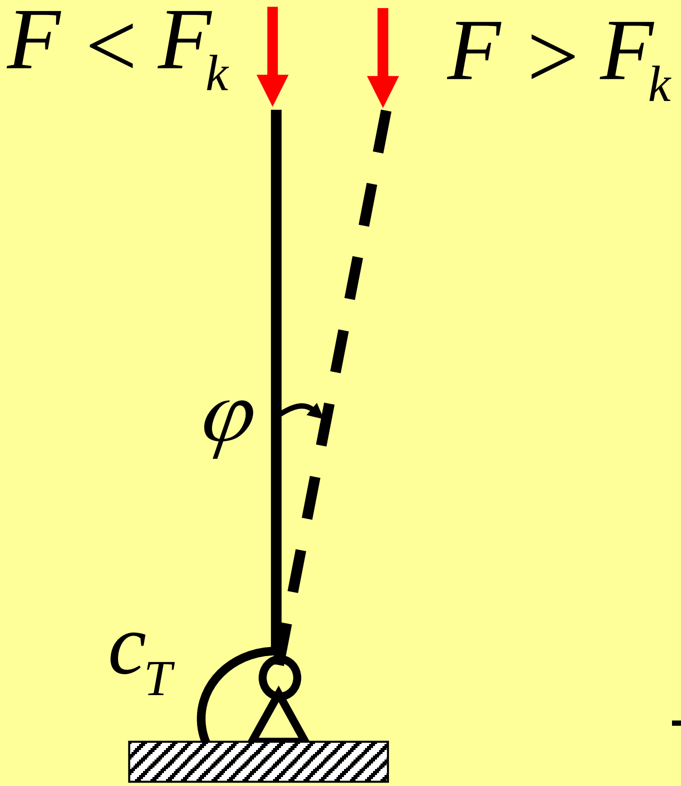
Kein Stabilitätsproblem !

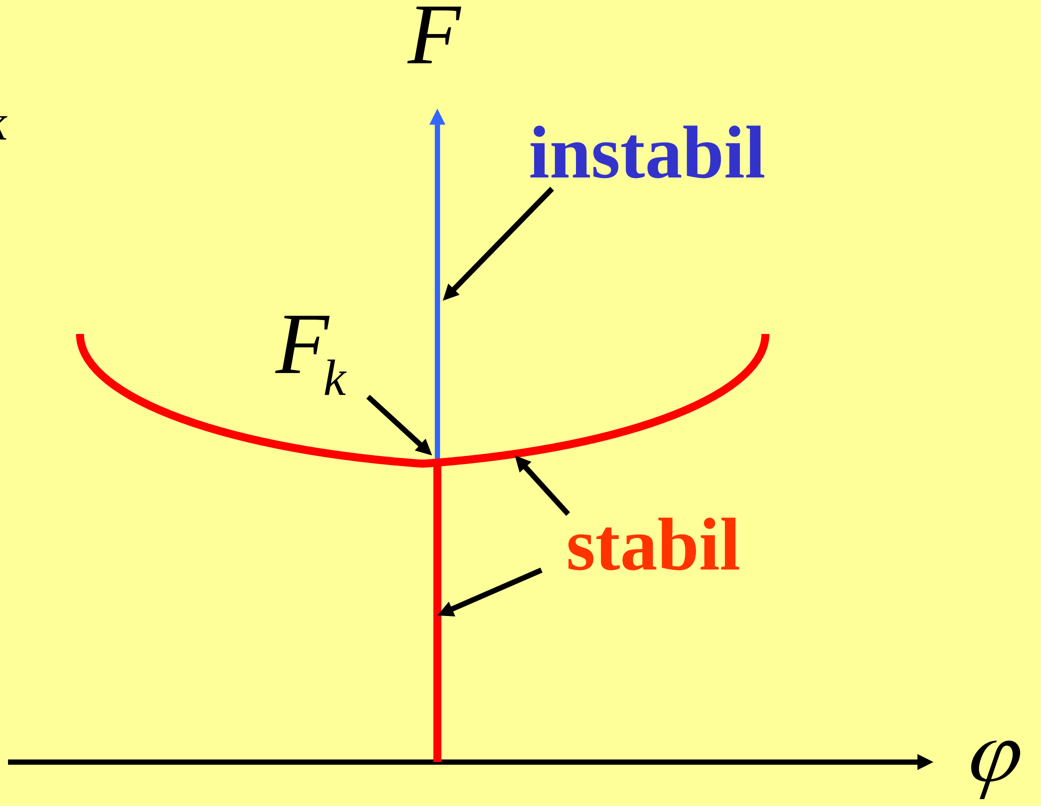
Stab unter Druck

Last-Verformungskurve nicht mehr eindeutig

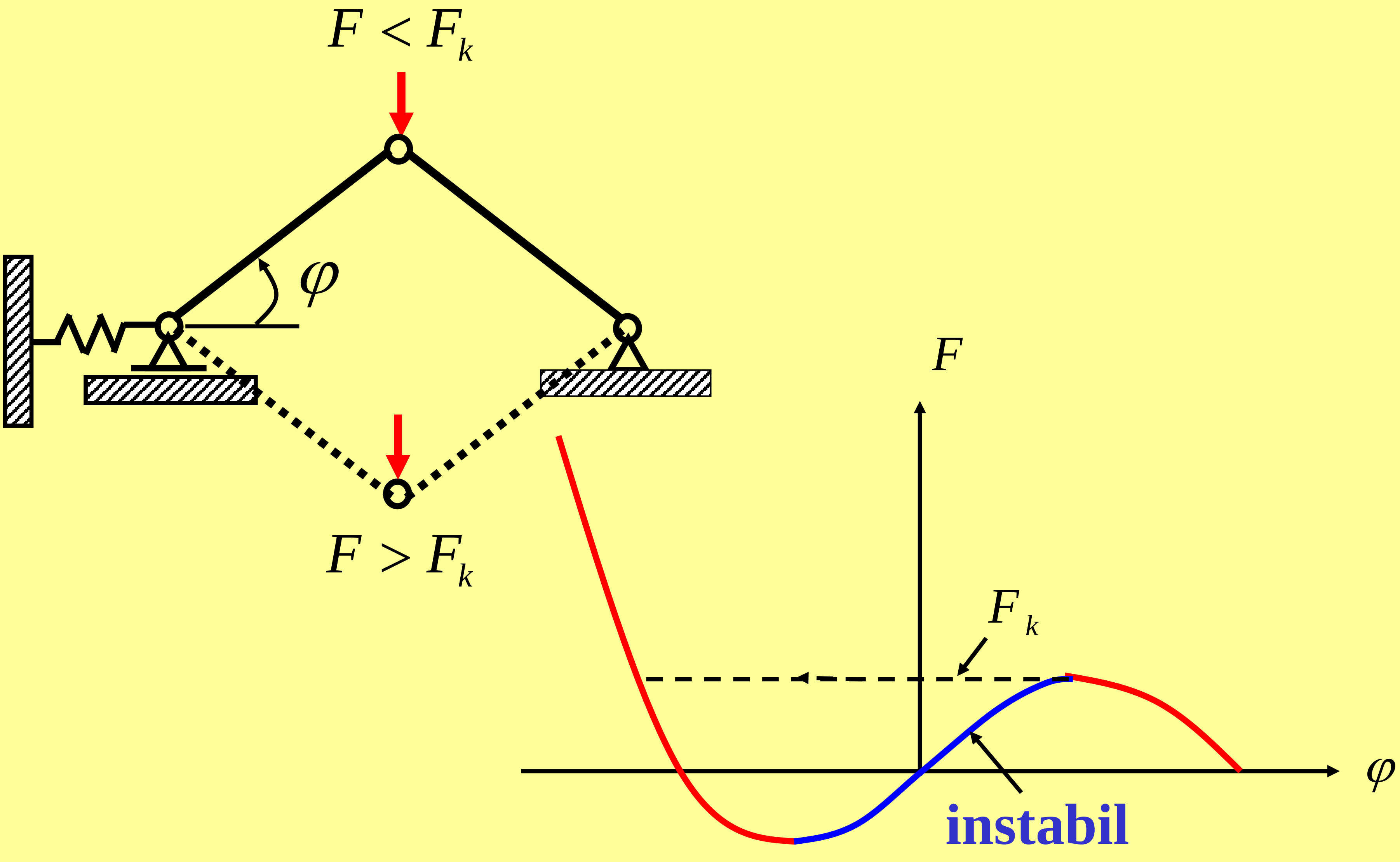
Stabilitätsproblem !

Verzweigungsproblem





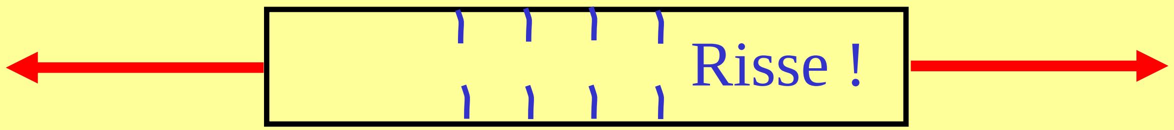
Durchschlagproblem



Warum ist Knicken gefährlich ?

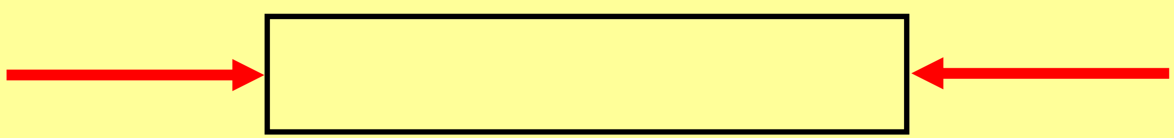
Stab unter Zug:

Versagen mit Vorankündigung !



Stab unter Druck (Knicken):

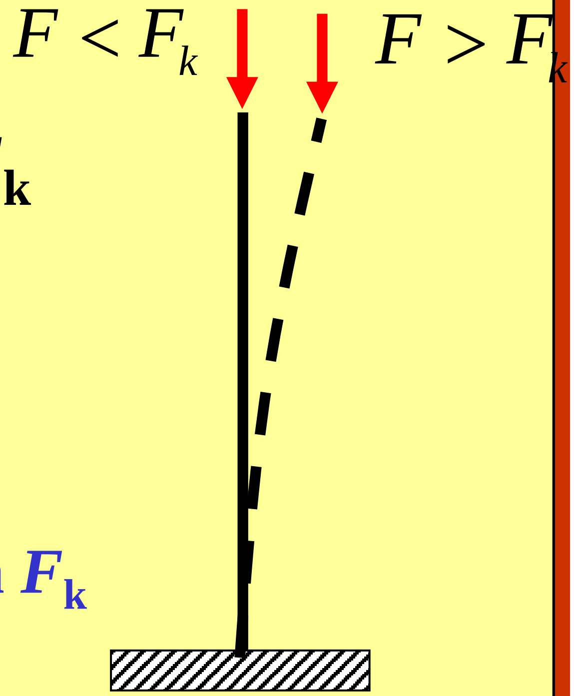
Versagen ohne Vorankündigung ! Viel gefährlicher!



Hauptaufgabe der Stabilitätstheorie

Hauptaufgabe der Stabilitätstheorie:

Bestimmung kritischer Lasten F_k



Knicken: **gedrückte Stäbe**

Seitliches Ausweichen oberhalb der kritischen Lasten F_k

Kippen: **Biegebalken**

Drillknicken: **Torsionsstäbe**

Beulen: **Platten, Schalen**

Wovon hängt F_k ab ?

- Knicklänge und Schlankheitsgrad
- Randbedingungen (gelenkig, eingespannt, frei)
- Aussteifung des Systems (verschieblich, unverschieblich)
- Imperfektionen
- Bewehrungsmenge und Bewehrungsanordnung

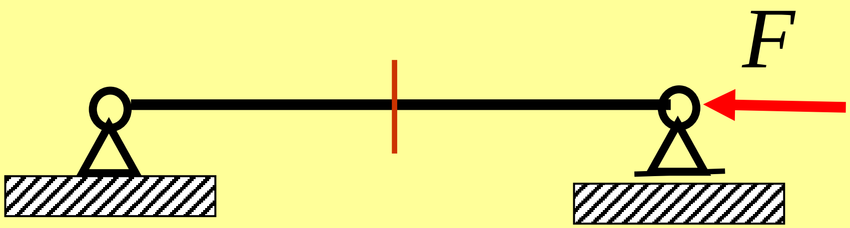
Beispiel: Euler-Knicklast
(Leonard Euler, 1707-1783)

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Theorie II. Ordnung

Vergleich: Theorie I. Ordnung und Theorie II. Ordnung

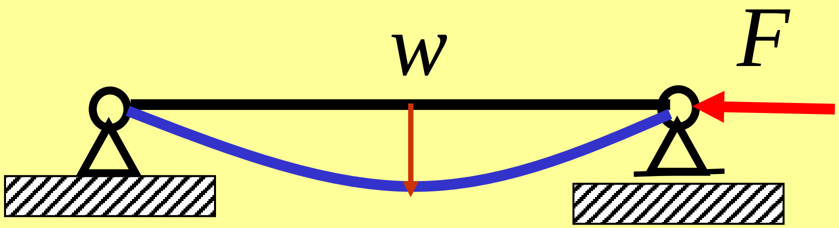
Th. I. Ordnung



Gleichgewicht am unverformten System !

$$M_I = 0\,!$$

Th. II. Ordnung



Gleichgewicht am verformten System !

$$M_{II} = F \cdot w\,!$$

M_{II} (aus Druck) vergrößert das Bemessungsmoment zusätzlich !

Knickgleichung

Knickgleichung: Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$\boxed{w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0}$$

mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C(\lambda x) + D}$$

$A, B, C, D:$ Unbekannte Konstanten, aus Randbedingungen zu bestimmen!

Bemerkungen zur Knickgleichung

1) *Herleitung der Knickgleichung*: Siehe Arbeitsblätter!

2) *Zur Lösung der Knickgleichung* werden *Randbedingungen* benötigt. Für einige Lagerungsfälle sind die Randbedingungen in den Arbeitblättern zusammengestellt.

3) *Bestimmung der Knicklast*: Vorgehensweise siehe Beispiel in den Arbeitsblättern!

Euler-Knickstäbe (Eulerfälle)