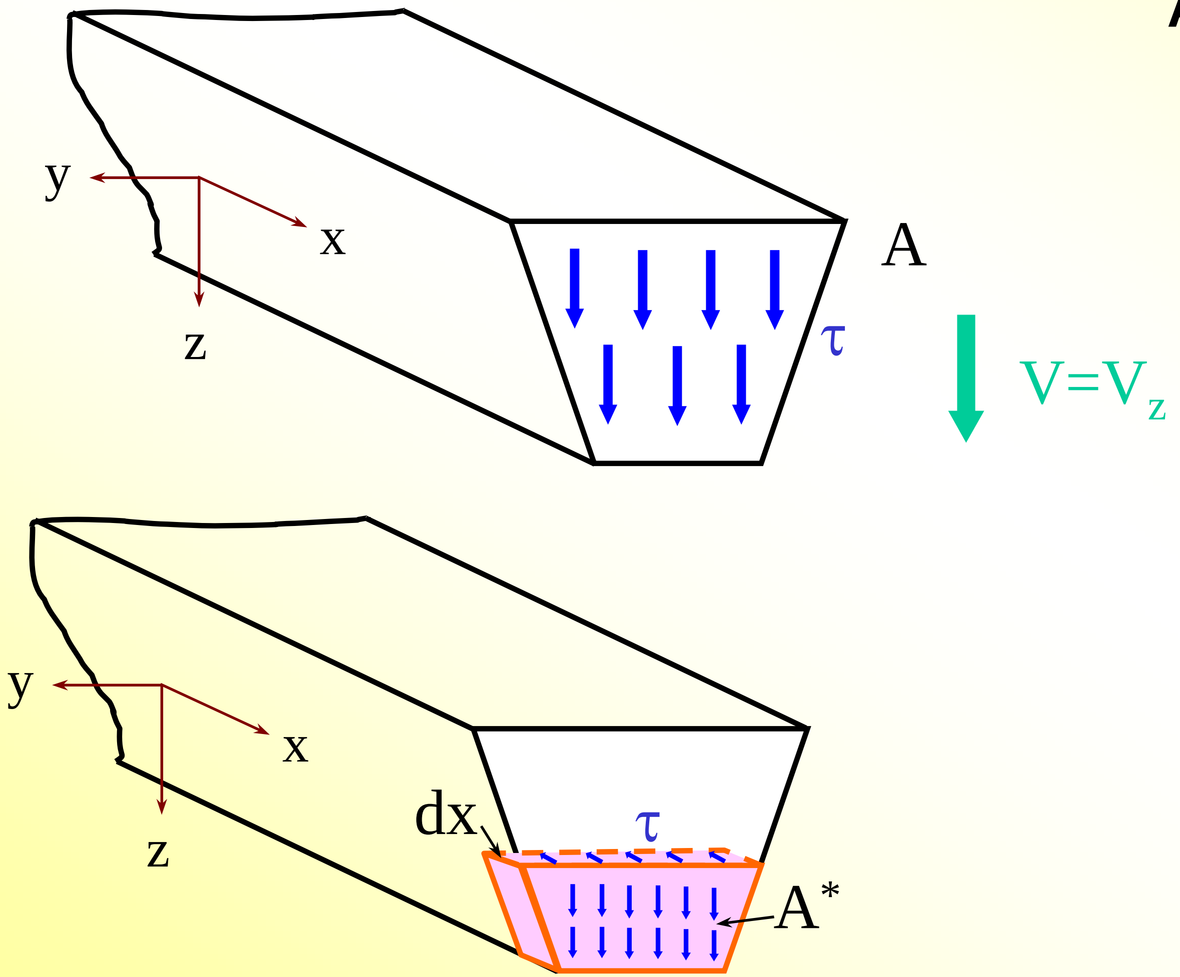
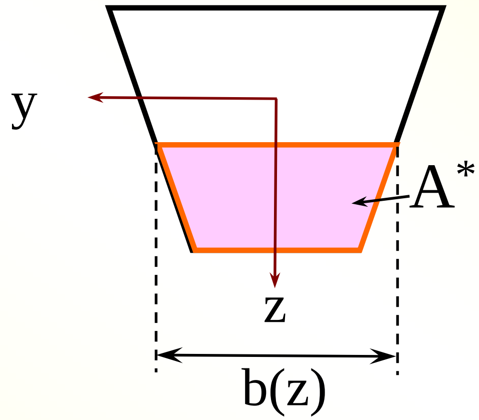
4. Schubspannung infolge Querkraft

4.1 Vollquerschnitte



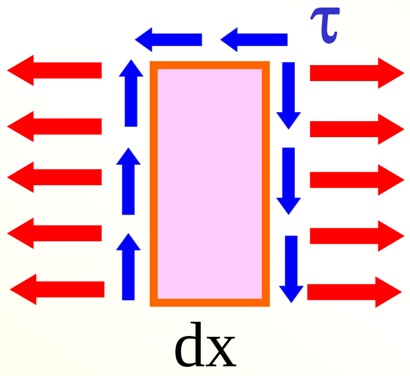
Äquivalenz von V und τ:

$$V = \int_A \tau dA$$



4. Schubspannung infolge Querkraft

σ



$\sigma + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} dx$

Gleichgewichtsbedingung: →

$$-\tau(z) \cdot b(z) dx - \int_{A^*} \sigma dA + \int_{A^*} \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) dA = 0$$

$$\rightarrow \quad \tau(z) \cdot b(z) dx = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dA$$

Mit $\sigma = \dfrac{M_z}{I_y} \cdot \zeta$, $\dfrac{dM_z}{dx} = V_z$ $\rightarrow$ $\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = \dfrac{V_z}{I_y} \cdot \zeta$

$$\rightarrow \quad \tau(z) \cdot b(z) dx = \frac{V_z}{I_y} \underbrace{\int_{A^*} \zeta dA}_{S_y^*(z)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\tau(z) = \frac{V_z \cdot S_y^*(z)}{I_y \cdot b(z)}}$$

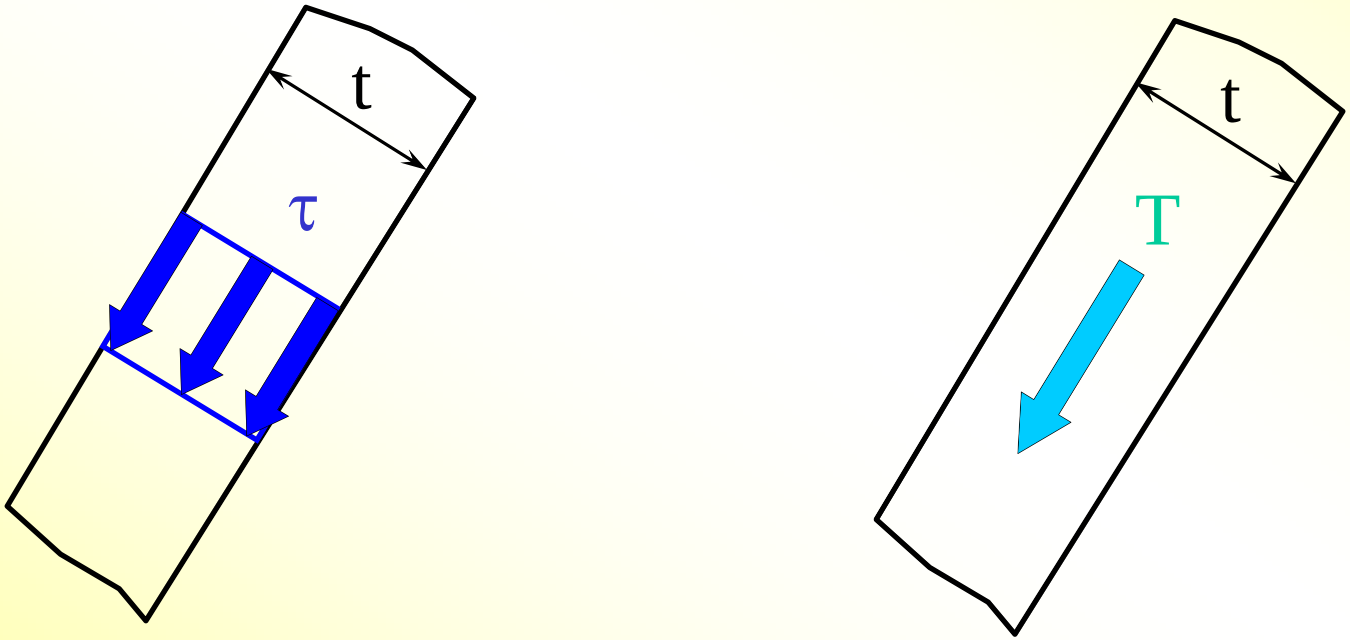
Bestimmung von $S_y^*(z)$:

1.) $S_y^*(z) = A^* \cdot z_s^*$; 2.) $S_y^*(z) = \int_{A^*} \zeta dA$;

3.) Es kann auch die Fläche oberhalb on z verwendet werden.

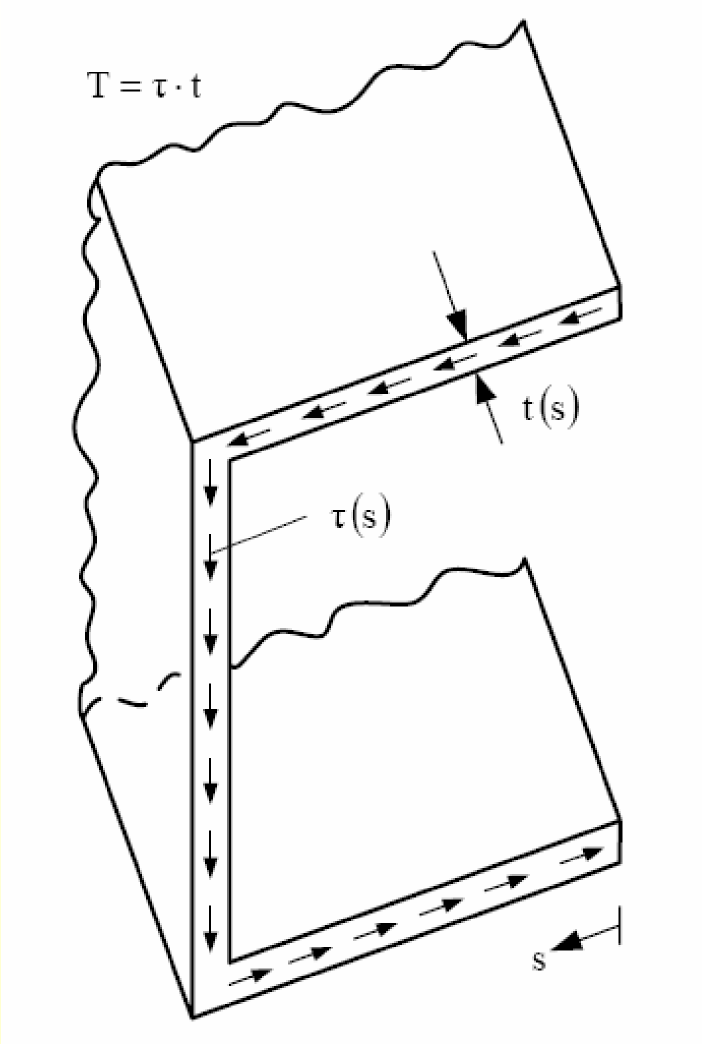
4.2 Dünnwandige Querschnitte

Annahme: Schubspannung τ über die Querschnittsdicke t



Schubfluss: $$T = \tau \cdot t$$

4. Schubspannung infolge Querkraft



s – Bogenlänge, Profilkoordinate

Schubspannung:

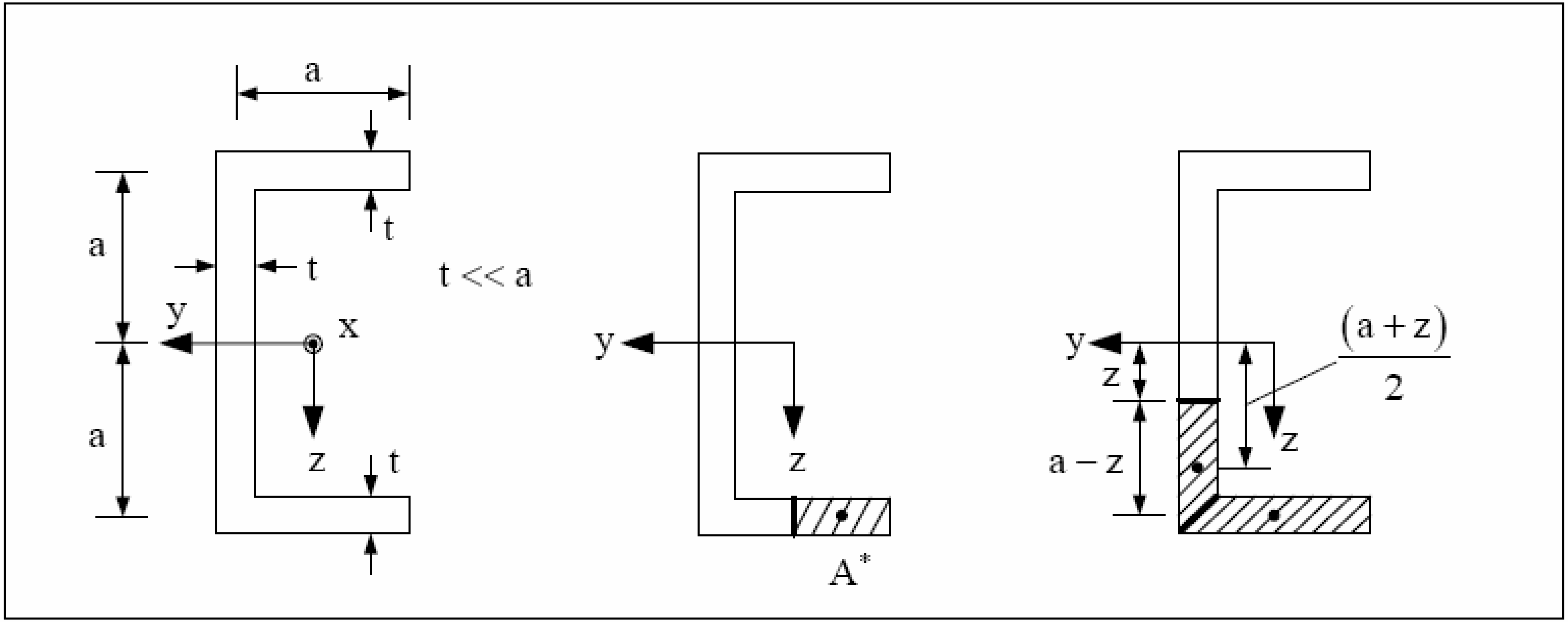
$$\tau(s) = \frac{V_z \cdot S_y^*(s)}{I_y \cdot t(s)}$$

Statisches Moment:

$$S_y^*(s) = \int_{A^*} z(s)dA = \int_{s}^{s_{\max}} t(s)z(s)ds = -\int_{0}^{s} t(s)z(s)ds$$

4. Schubspannung infolge Querkraft

Bsp.: Schubspannung im U-Profil



4. Schubspannung infolge Querkraft

Schnittstelle im unteren Flansch:

$$S_y^* = A^* \cdot z_s^* = t \cdot s \cdot a$$

Schnittstelle im Steg:

$$S_y^* = A^* \cdot z_s^* = (t \cdot a) \cdot a + \left[(a - z) \cdot t\right] \cdot \frac{a + z}{2} = \frac{t}{2}(3a^2 - z^2)$$

Trägheitsmoment:

$$I_y = \frac{t \cdot (2a)^3}{12} + 2\left[a^2 \cdot (at)\right] = \frac{8}{3} t a^3$$

4. Schubspannung infolge Querkraft

Schubspannung im unteren Flansch:

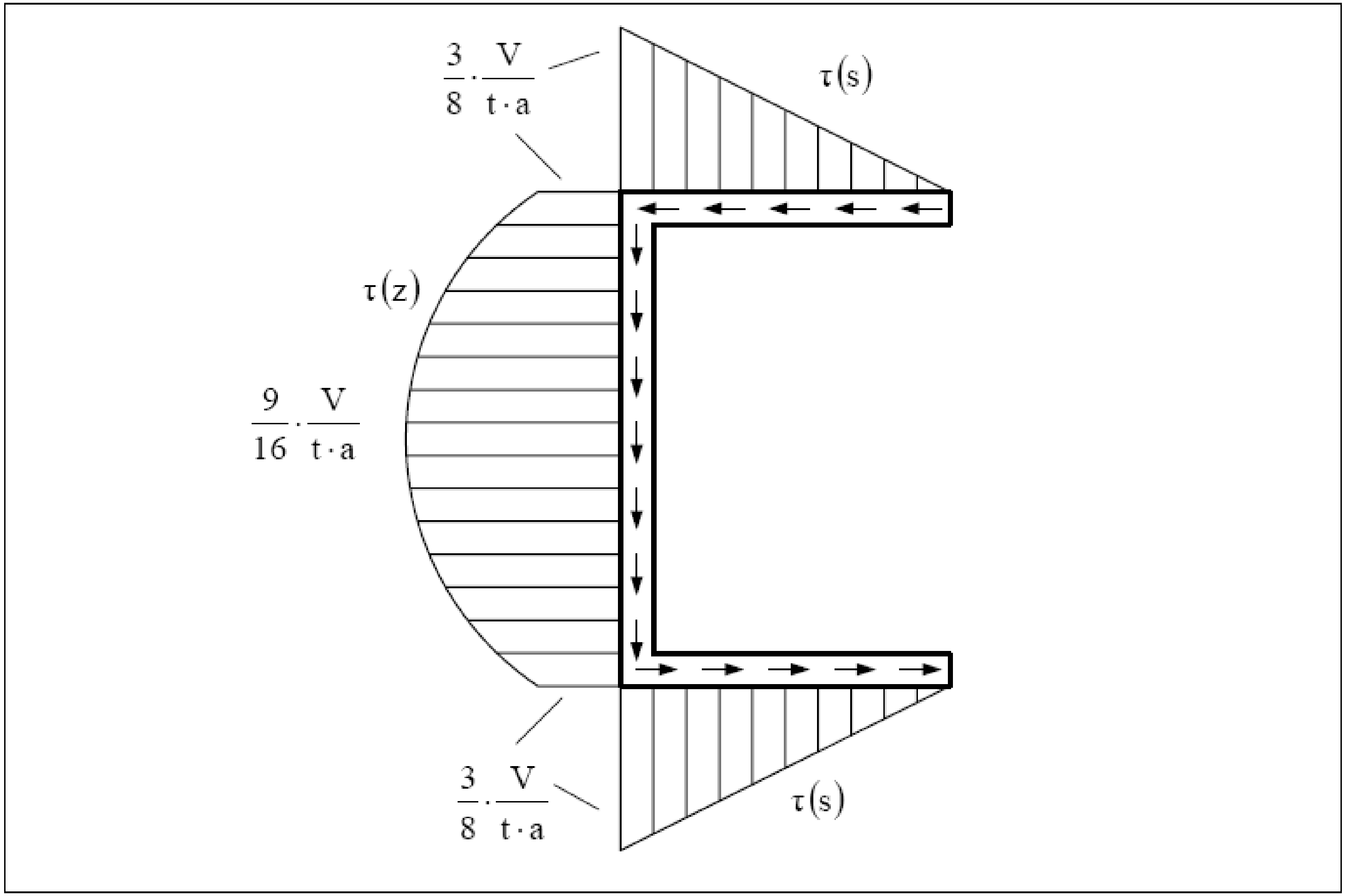
$$\tau(s) = \frac{3V}{8ta} \cdot \frac{s}{a}$$

Schubspannung im Steg:

$$\tau(z) = \frac{3V}{16ta} \cdot \left(3 - \frac{z^2}{a^2}\right)$$

4. Schubspannung infolge Querkraft

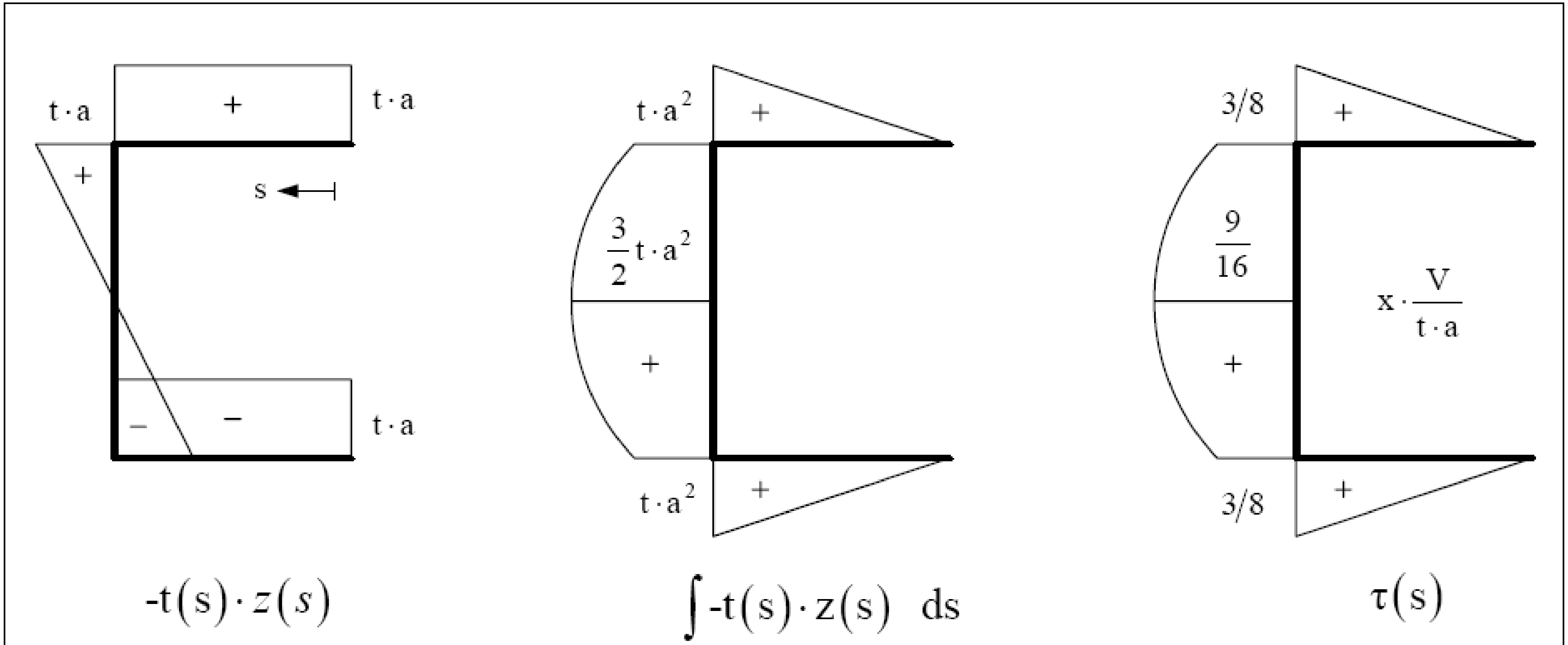
Schubspannungsverlauf:



4. Schubspannung infolge Querkraft

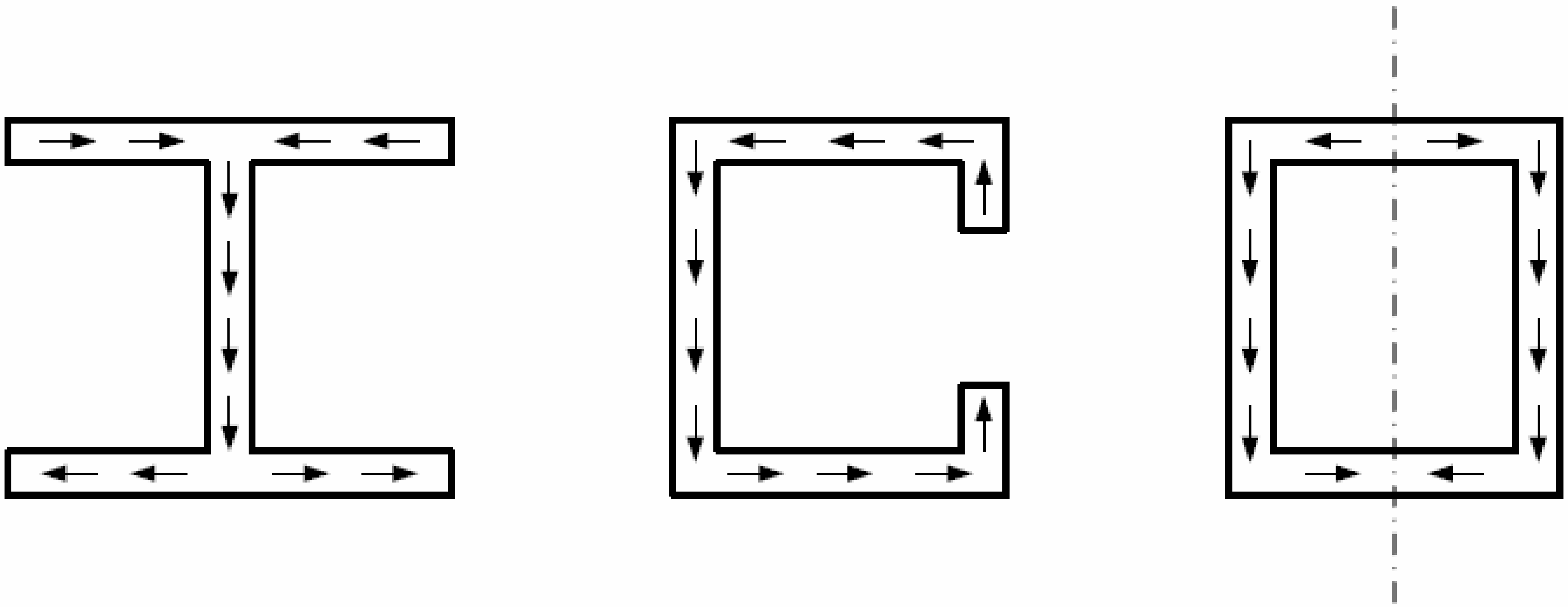
Andere Lösungsmöglichkeit:

Man führt eine Profilkoordinate s entlang des Schubflusses, also immer an freien Enden beginnt oder endet!



4. Schubspannung infolge Querkraft

Schubspannungsverlauf einiger Querschnitte:

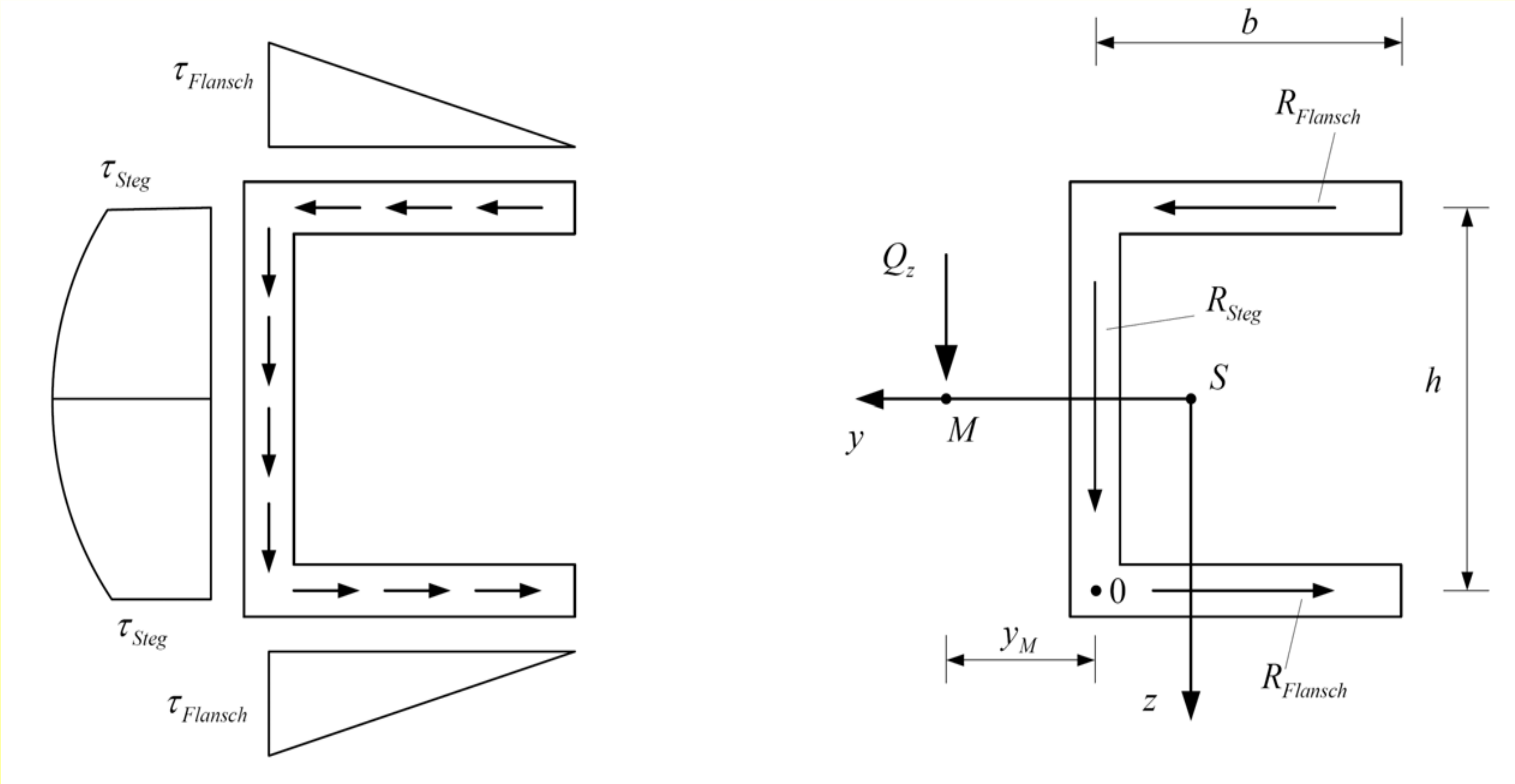


Die Wahl der Profilkoordinate s ist frei. Sinnvoll ist es aber, s so einzuführen, dass sie dem Verlauf des Schubflusses entspricht.

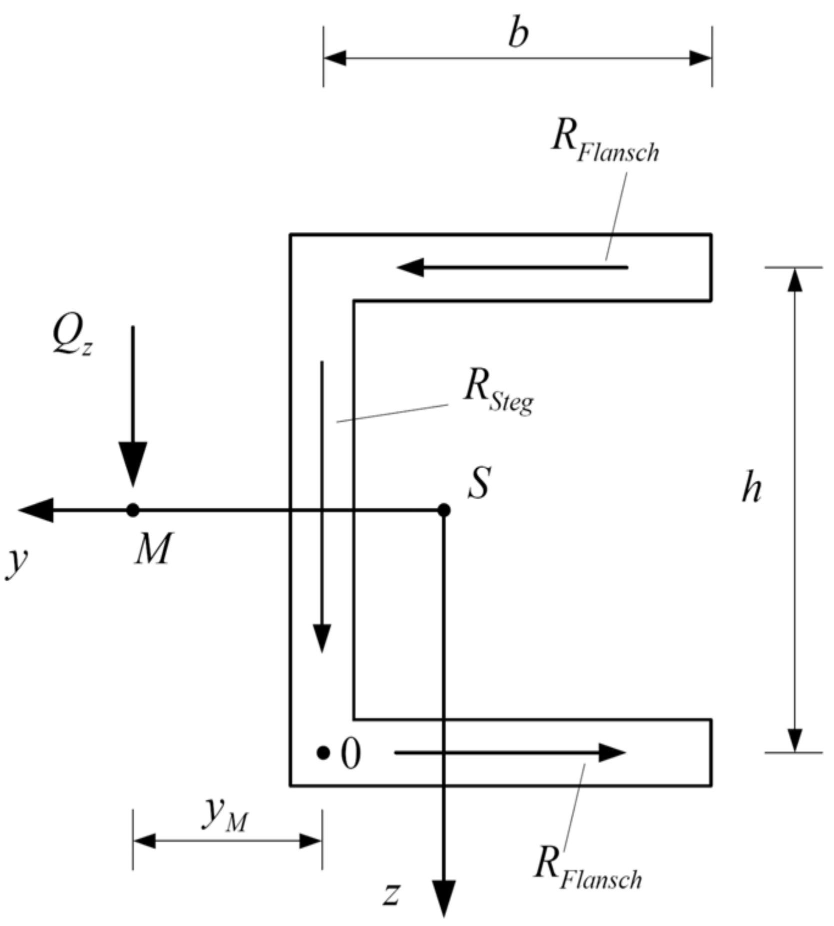
4.3 Schubmittelpunkt

Definition:

Der Schubmittelpunkt M ist der Punkt, durch den die Wirkungslinie der Querkraft gehen muss, damit der Querschnitt keine Torsion (Verdrehung) erfährt.



4. Schubspannung infolge Querkraft



Momentengleichgewicht:

$$Q_z \cdot y_M = \underbrace{T_{Flansch} \cdot b \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{\text{Resultierende aus} \\ \text{Dreiecksfläche der Schubspannung}}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Hebelarm}} = R_{Flansch} \cdot h$$

$$\boxed{y_M = \frac{R_{Flansch} \cdot h}{Q_z}}$$

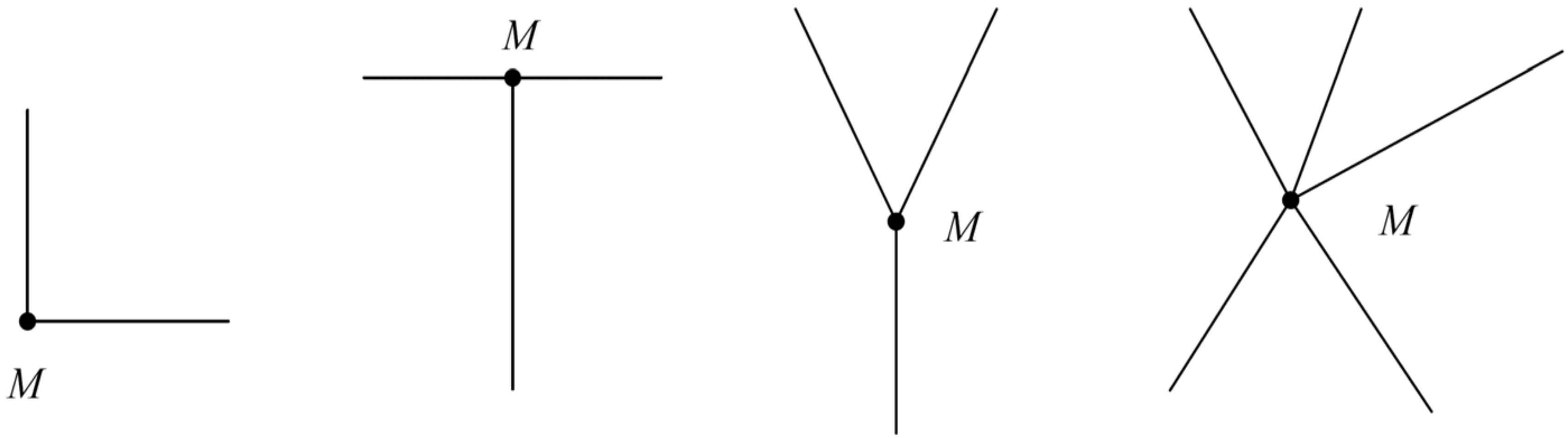
4. Schubspannung infolge Querkraft

Bemerkung:
Der Schubmittelpunkt ist eine geometrische Eigenschaft des Querschnitts und unabhängig von den Lasten oder Schnittgrößen!

Beispiele zum Schubmittelpunkt

1.) Sternförmige Querschnitte

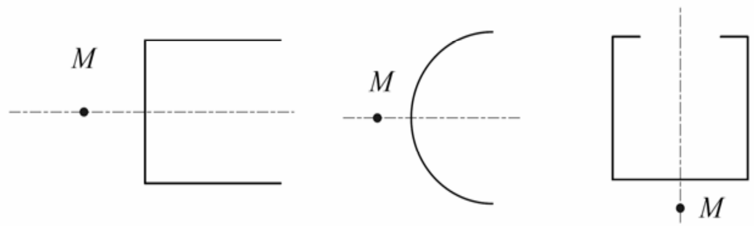
- Schubmittelpunkt = Schnittpunkt



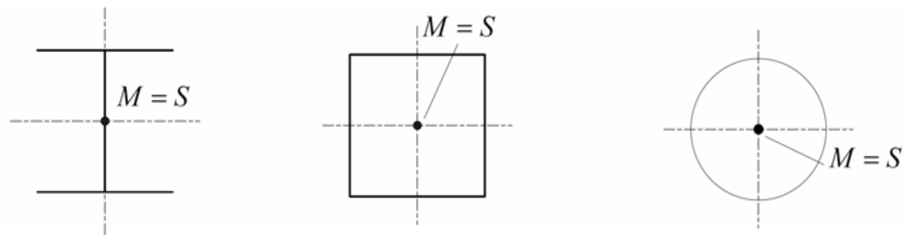
4. Schubspannung infolge Querkraft

2.) Symmetrische Querschnitte

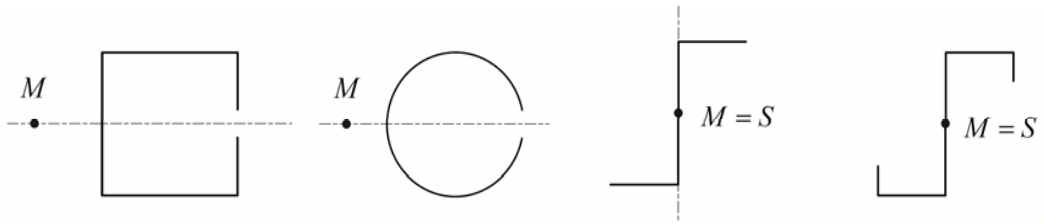
- Einfache Symmetrie
  Schubmittelpunkt liegt auf der Symmetrieachse



- Doppelte Symmetrie
  Schubmittelpunkt = Schwerpunkt



Man beachte:



4.4 Ergänzungen zur Schubspannung

Elastizitätsgesetz für Schubspannung:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

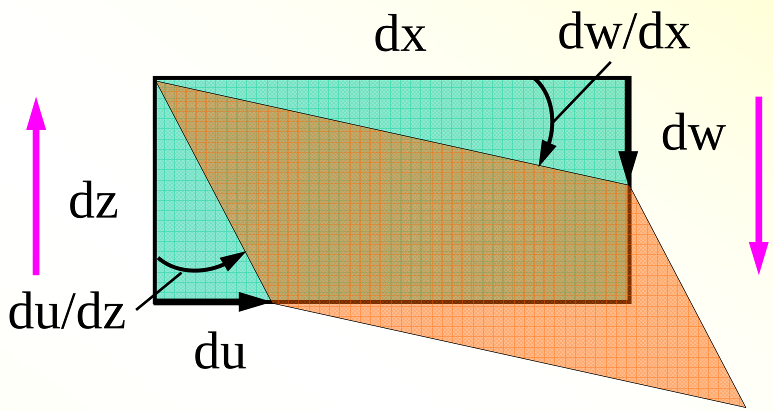
τ : Schubspannung

G : Schubmodul

γ : Schubverzerrung

Schubverzerrung: (vgl. gerade Biegung!)

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = w' + \psi$$

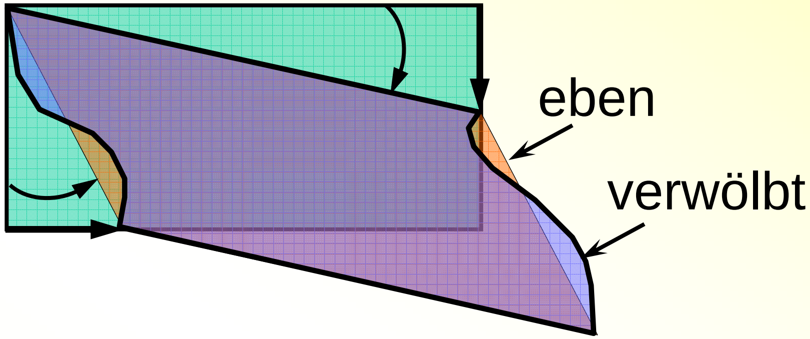


$$\tau = G \cdot \left(w' + \psi \right)$$

$$V = \tau \cdot A = GA \cdot \left(w' + \psi \right)$$

Demnach ist t konstant! In Wirklichkeit ist sie aber eine Funktion von z. Somit ist auch g eine Funktion von z. Danach kann der Querschnitt <u>nicht eben</u> bleiben.

4. Schubspannung infolge Querkraft



Allgemein gilt:

$$\boxed{V = \int_A \tau \, dA = \tau A_s = GA_s \cdot \gamma = GA_s \cdot (w' + \psi)}$$

EI :	Biegesteifigkeit
GA_s :	Schubsteifigkeit
$A_s = \kappa A$:	Schubfläche
κ :	Formfaktor

Die Schubspannung hat Einfluss auf die Durchbiegung. Der Einfluss ist aber sehr klein. Je schlanker der Balken ist, um so kleiner wird der Einfluss des Schubs. Der Einfluss ist vernachlässigbar, falls:

Balkenlange > 5-fache Höhe des Querschnittes!