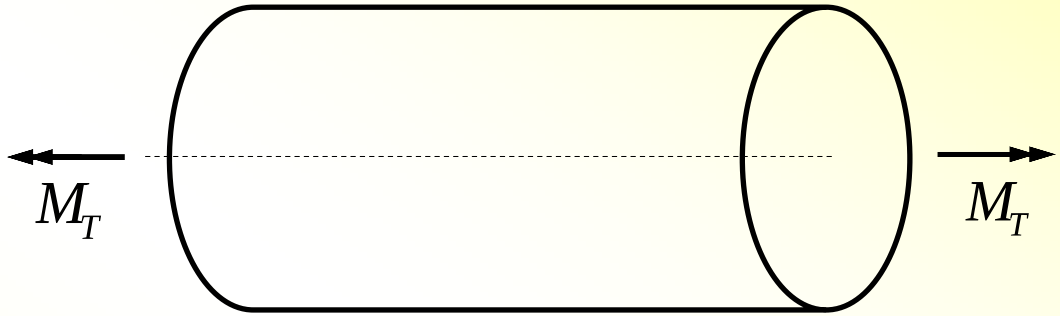


Ein Torsionsmoment M_T verursacht Schubspannungen τ im Querschnitt.

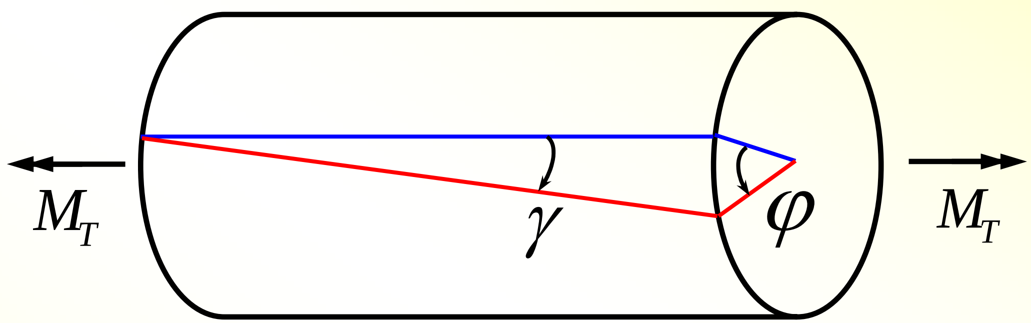
Falls die Querschnitte sich aus ihrer Ebene in x-Richtung bewegen können, dann nennt man diese Torsion „Saint-Venantsche Torsion".

Die Bewegung der Querschnitte in x-Richtung nennt man „Verwölbung".

Man nennt verwölbungsbehinderte Torsion „Wölbkrafttorsion".

M_T ist positiv, wenn M_T am *positiven Schnittufer* als Rechtsschraube um die Stabachse (x-Achse) dreht.

5.1 Torsion von Kreisquerschnitten



Annahmen:

1.) Querschnitte bleiben eben, d.h. keine Verschiebungen in x-Richtung (keine Verwölbung).

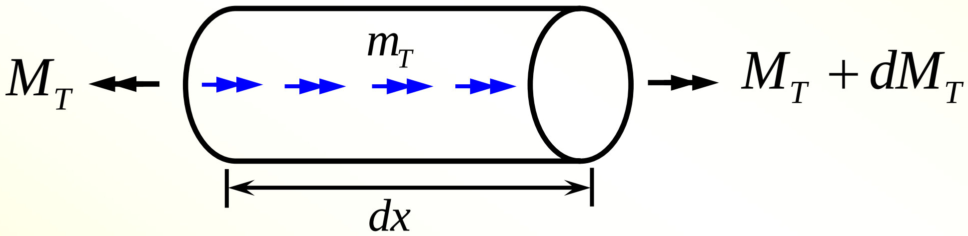
2.) Querschnitte sind formtreu, d.h. sie verformen sich nicht bei der Torsion und verdrehen sich nur um einen Winkel $\varphi(x)$.

3.) Die Gleitung γ ist auf der gesamten Zylinderoberfläche gleich.

5. Torsion

1.) Gleichgewicht

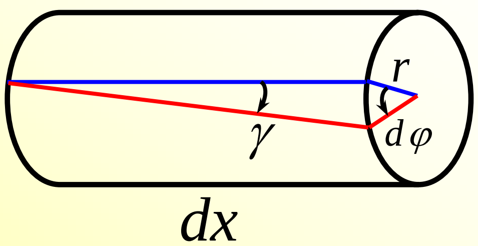
$$dM_T + m_T \cdot dx = 0$$



$$\boxed{\frac{dM_T}{dx} = -m_T}$$

2.) Kinematik

$$r \cdot d\varphi = \gamma \cdot dx$$



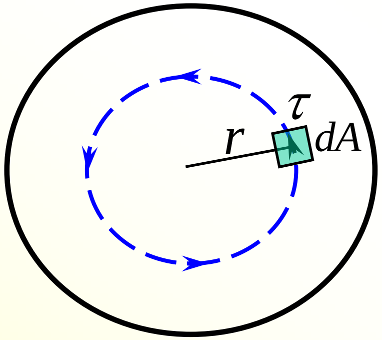
$$\boxed{\gamma = \frac{d\varphi}{dx} \cdot r = \theta \cdot r}$$

$$\boxed{\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'}$$ Drillung, Verwindung

3.) Elastizitätsgesetz

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r\varphi'$$

4.) Äquivalenz der Schubspannung und des Torsionsmomentes



$$\boxed{M_T = \int_A \tau \cdot r dA}$$

5.) Differentialgleichungen

$$M_T = \int_A \tau \cdot r dA = G\varphi' \int_A r^2 dA = GI_T \varphi' \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_T = GI_T \varphi'}$$

$$M_T' = \left(GI_T \varphi'\right)' = -m_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(GI_T \varphi'\right)' = -m_T}$$

$I_T = I_p$: Torsionsträgheitsmoment

GI_T : Torsionssteifigkeit

Differentialgleichung für Drillung:

$$\left(GI_T\,\theta\right)' = -m_T$$

Sonderfall: GI_T=const.

$$GI_T\,\varphi'' = -m_T$$

$$GI_T\,\theta' = -m_T$$

Falls M_T=const, dann erhält man für die Endverdrehung φ_l:

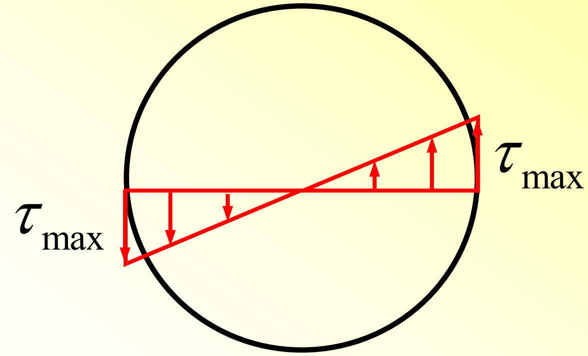
$$\varphi_l = \frac{M_T \cdot l}{GI_T}$$

6.) Schubspannung

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r\varphi'$$

$$M_T = GI_T\varphi'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{M_T}{I_T} \cdot r}$$



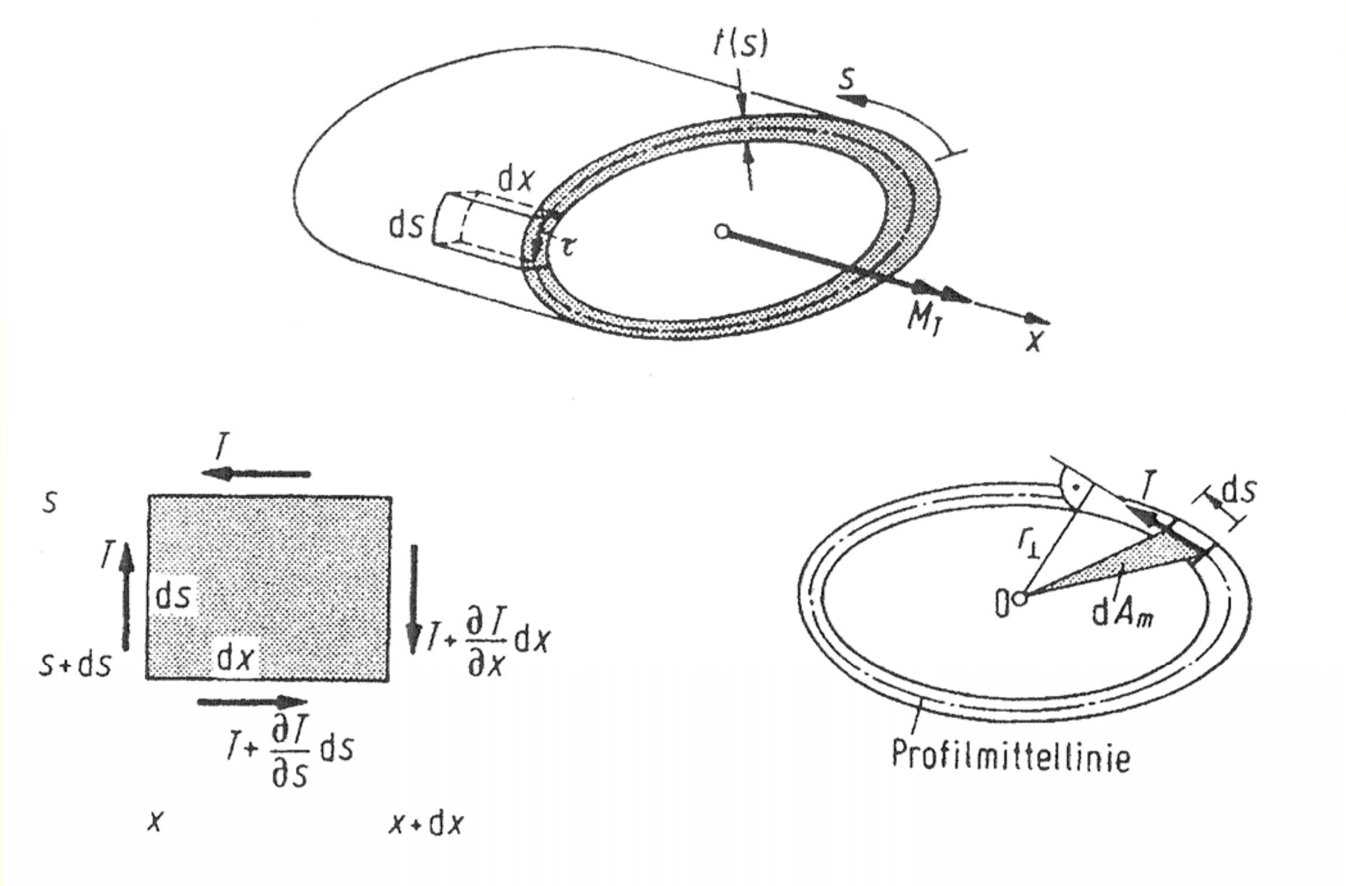
τ_{max} tritt am Rand $r = R$ auf:

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} \cdot R = \frac{M_T}{I_T / R} = \frac{M_T}{W_T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}}$$

$$W_T = \frac{I_T}{R}: \qquad \text{Torsionswiderstandsmoment}$$

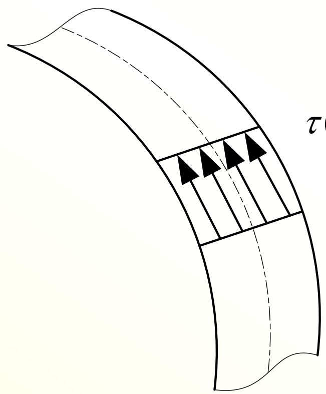
5.2 Torsion dünnwandiger geschlossener Profile

5.2.1 Schubspannungen

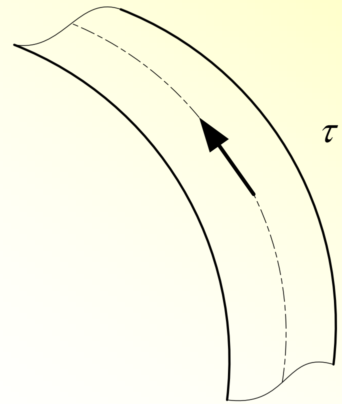


5. Torsion

Schubspannung



Schubfluss



Schubfluss: $T = \tau(s) \cdot t(s) = const.$

Torsionsmoment: $M_T = \int \tau(s) \cdot t(s) \cdot r_\perp ds = T \oint r_\perp ds = T \cdot 2A_m \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{M_T}{2A_m}$

$$\left(dA_m = \frac{1}{2} r_\perp ds \quad \rightarrow \quad A_m = \frac{1}{2} \oint r_\perp ds \right)$$

Schubspannung: $\boxed{\tau = \dfrac{T}{t} = \dfrac{M_T}{2A_m t}}$ Erste Bredtsche Formel (Rudolf Bredt, 1842-1900)

5. Torsion

Maximale Schubspannung:

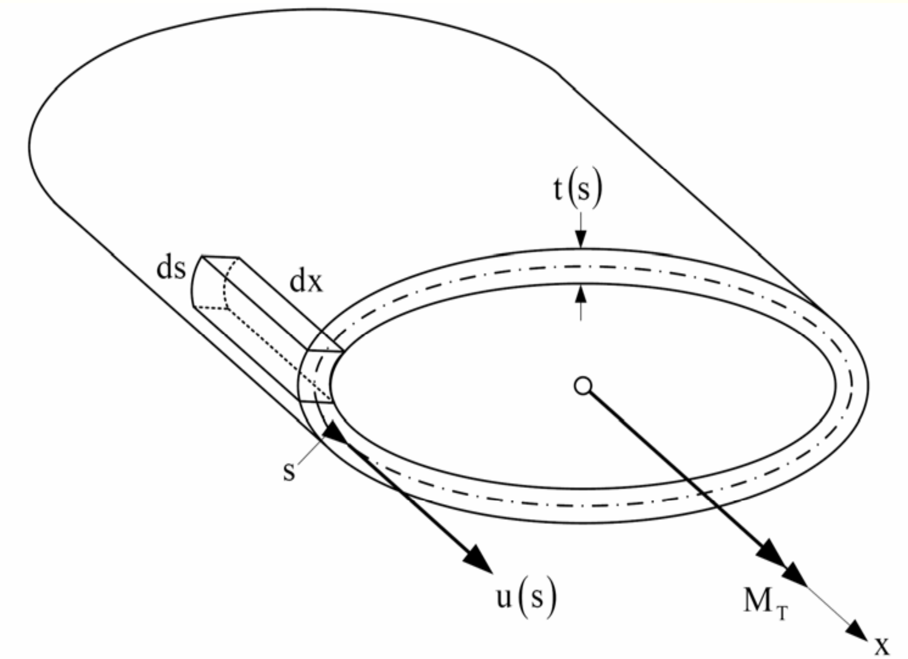
Maximale Schubspannung t_{max} tritt an der Stelle der kleinsten Wanddicke t_{min} auf:

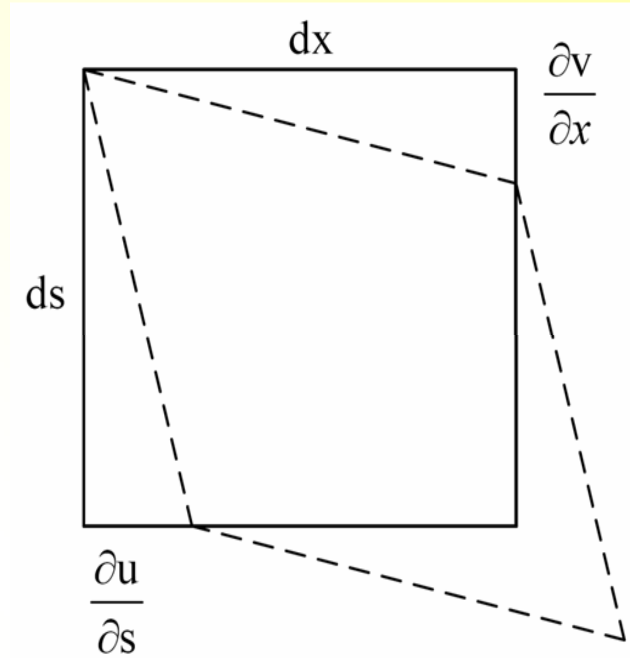
$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_T}{2A_m t_{\min}} = \frac{M_T}{W_T}}$$

Torsionswiderstandsmoment:

$$W_T = 2A_m \cdot t_{\min}$$

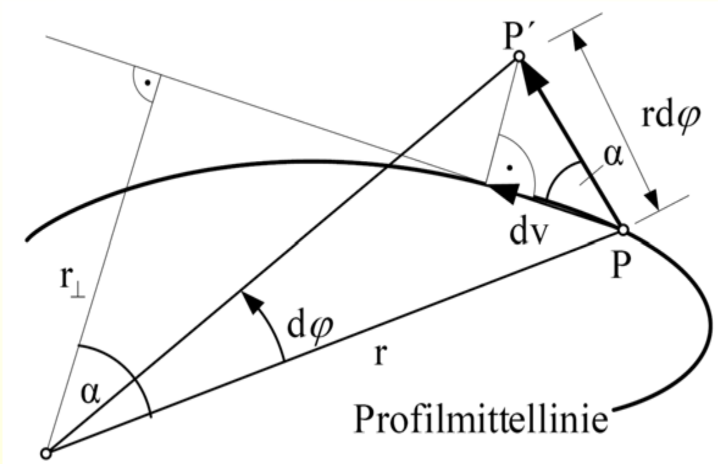
5.2.2 Drillung





$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}$$

5. Torsion



$$dv = r \cdot d\varphi \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha \cdot d\varphi = r_\perp \cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = r_\perp \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r_\perp \cdot \varphi'$$

$$\frac{\tau}{G} = r_\perp \cdot \varphi' + \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\oint \frac{\tau}{G} ds = \varphi' \cdot \oint r_\perp ds + \oint \frac{\partial u}{\partial s} ds$$

Keine Klaffung: $\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{s_A}^{s_E} \frac{\partial u}{\partial s} ds = u_E - u_A \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \oint \frac{\tau}{G} ds = \varphi' \oint r_\perp ds = \varphi' \cdot 2A_m$$

$$\varphi' = \frac{\oint \frac{\tau}{G} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{\oint \frac{T}{G \cdot t} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{\oint \frac{M_T}{G \cdot t \cdot 2 \cdot A_m} ds}{2 \cdot A_m} = \frac{M_T}{G \left[(2 \cdot A_m)^2 \Big/ \oint (1/t) ds \right]}$$

5. Torsion

$$\boxed{\theta = \varphi' = \frac{\mathrm{M_T}}{\mathrm{GI_T}}}$$

Zweite Bredtsche Formel

Mit: $$I_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{ds}}$$

Sonderfall: t(s)=const.

$$I_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{ds}} = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{\oint \mathrm{ds}} = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_T = \frac{(2A_m)^2 \cdot t}{U}}$$

$U = \oint \mathrm{ds}$ Profilumfang

5.2.3 Verwölbung

Verformungen unter Torsion:

Keine Verformungen in der y-z-Ebene (formtreu).

Verschiebungen u in x-Richtung möglich, die nicht über den Querschnitt konstant sind. Dieser Effekt wird als „Verwölbung“ des Querschnittes bezeichnet.

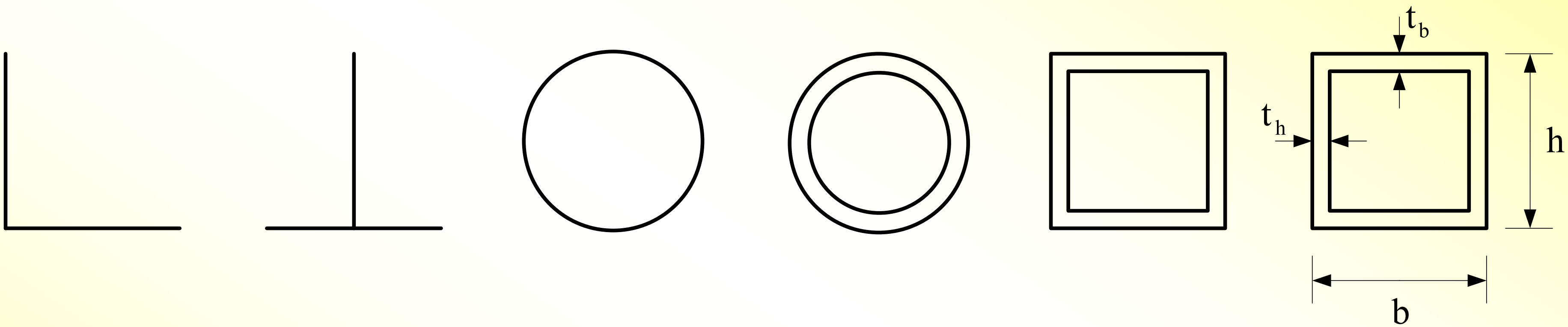
Bestimmung der Verwölbung $\mathbf{u(s)}$:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= G\gamma = G\left(\mathrm{r}_\perp \cdot \varphi' + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{s}}\right) \\ \tau &= \frac{T}{t} = \frac{M_T}{2A_m t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \frac{M_T}{2A_m t \cdot G} &= \mathrm{r}_\perp \cdot \varphi' + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{s}} \\ \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{s}} &= \frac{M_T}{2A_m t \cdot G} - \mathrm{r}_\perp \cdot \varphi' \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{u(s) = \int \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{s}} ds = \frac{M_T}{2A_m G} \int \frac{1}{t(s)} ds - \varphi' \int \mathrm{r}_\perp \, ds + C}$$

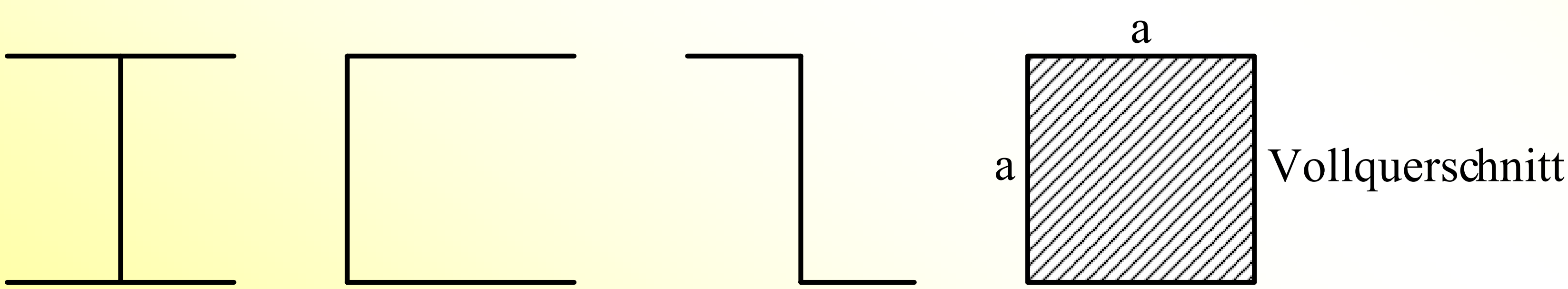
C = Integrationskonstante

Wölbfreie Querschnitte:

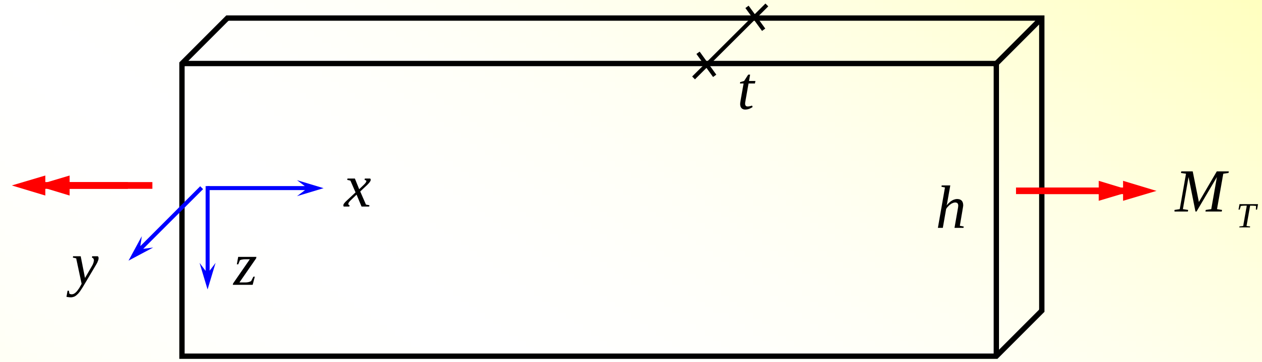


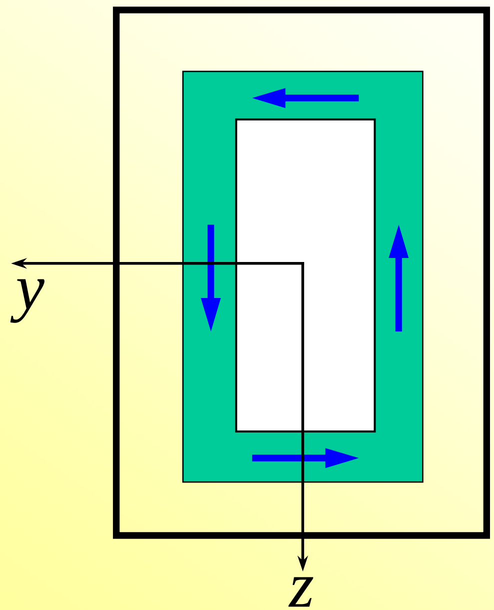
$$h/t_h = b/t_b$$

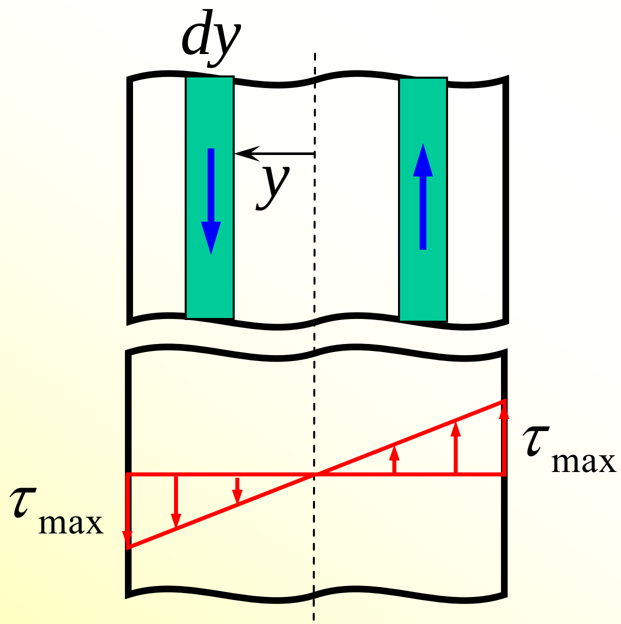
Nicht wölbfreie Querschnitte:



5.3 Torsion dünnwandiger offener Profile







$$\tau(y) = \frac{\tau_{max}}{t/2}\cdot y; \qquad A_m \cong 2y\cdot h$$

$$dT = \tau(y)dy; \qquad \tau = \frac{dT}{dy} = \frac{dM_T}{2A_m dy}$$

$$dM_T = 2A_m dT = 8\frac{\tau_{max}}{t}\cdot h\cdot y^2\cdot dy$$

5. Torsion

$$M_T = \int_0^{t/2} dM_T = \frac{1}{3}\tau_{\max} h t^2$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_T}{\frac{1}{3}ht^2} = \frac{M_T}{W_T}} \qquad W_T = \frac{1}{3}ht^2$$

Torsionsträgheitsmoment:

$$dI_T = \frac{(2A_m)^2}{\oint \frac{1}{\mathrm{dy}}\mathrm{ds}} = \frac{(2A_m)^2}{\oint \mathrm{ds}} dy = \frac{(2\cdot 2yh)^2}{2h} dy = 8hy^2 dy$$

$$\boxed{I_T = \int_0^{t/2} dI_T = \int_0^{t/2} 8hy^2 dy = \frac{1}{3}ht^3}$$

Zusammengesetzte Profile:

$$\theta = \varphi' = \theta_i = \frac{M_{T(i)}}{GI_{T(i)}} = \frac{M_T}{GI_T}$$

Drillung für alle Querschnittsteile gleich, da Querschnitte formtreu, also in der *y*-*z*-Ebene ihre Form beibehalten!

$$\boxed{M_T = \sum M_{T(i)}}$$

$$\boxed{I_T \cong \sum I_{T(i)} = \frac{1}{3}\sum h_i \cdot t_i^3}$$

$$\boxed{W_T = \frac{I_T}{t_{\max}} = \frac{1}{3}\frac{\sum h_i \cdot t_i^3}{t_{\max}}}$$

Maximale Schubspannung:

$$\boxed{\tau_{\max(i)} = \frac{M_{T(i)}}{W_{T(i)}};}$$

$$M_{T(i)} = \frac{GI_{T(i)}}{GI_T} \cdot M_T$$

$$\boxed{\tau_{\max(i)} = \frac{M_T \cdot I_{T(i)}}{I_T \cdot W_{T(i)}} = \frac{M_T}{I_T} \cdot t_i}$$

$$\boxed{W_T = \frac{I_T}{t_{\max}}}$$

Die maximale Schubspannung im Gesamtquerschnitt tritt also an der Stelle mit dem maximalen t_i (dickste Stelle) auf!