Baumechanik II
Musterlösung Probeklausur 1

Aufgabe 1: Stabgleichungen

a) Bestimmung der Normalkräfte und Normalspannungen

$$R = 200\text{kN}; \quad x_R = 1\frac{2}{3}\text{m}$$
$$N_1 = \frac{2}{3} \cdot 200\text{kN}; \quad N_2 = \frac{1}{3} \cdot 200\text{kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 5{,}44\,\text{kN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 1{,}498\,\text{kN/cm}^2$$

b) Berechnung der Längenänderung aus Normalkraft und Temperatur

$$\epsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$
$$\Delta l_T = \epsilon_T \cdot l = l \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \quad \Delta l_N = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_{T,1} + \Delta l_{N,1} = \alpha_{T,1} l_1 \Delta T_1 + \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$
$$\Delta l_1 = 0{,}000\,556\,6\,\text{m}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$
$$0{,}000\,556\,6\,\text{m} = \alpha_{T,2} l_2 \Delta T_2 + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \Delta T_2 = 5{,}651\,^\circ\text{K}$$

Aufgabe 2: Ebener Spannungszustand

a) Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mieses

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leqslant \sigma_{zul} = 120\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$\Longleftrightarrow \tau_{xy} \leqslant \pm 59{,}722\,\mathrm{N/mm^2}$$

b) Dehnungen des Spannungszustands

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \nu\sigma_y = 2,76 \cdot 10^{-4}\right)$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \nu\sigma_x = 9,048 \cdot 10^{-5}\right)$$

c) Hauptspannungen und Winkel

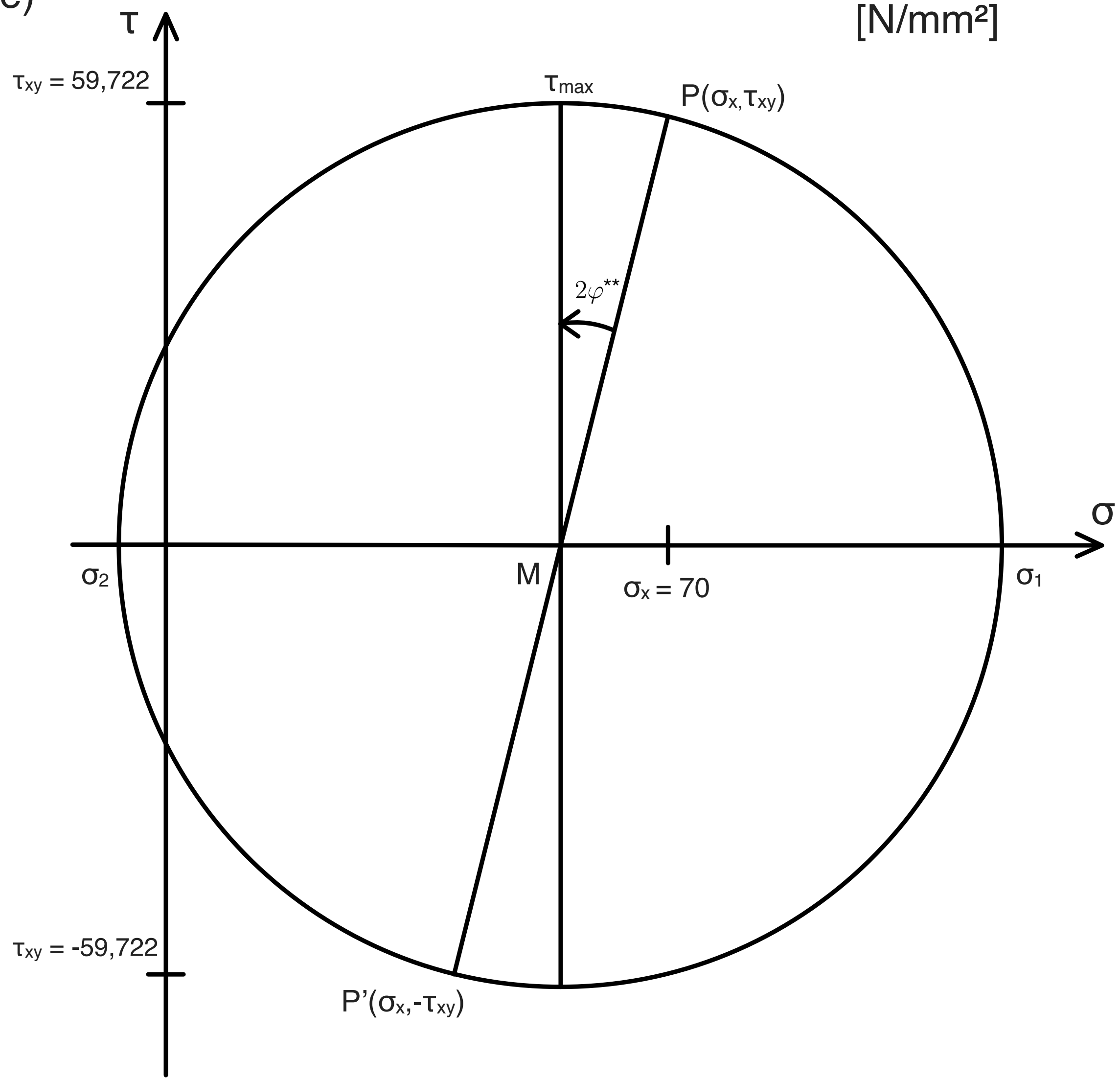
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_1 = 116{,}58\,\mathrm{N/mm^2} \qquad \sigma_2 = -6{,}58\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\varphi* = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = 37{,}95°$$

d)

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) = \pm 61{,}58\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$\varphi ** = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) = -7{,}05°$$
$$\sigma_M = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) = 55\,\mathrm{N/mm^2}$$

e)



Aufgabe 3: Differentialgleichung der Biegelinie ermitteln

a) Biegemomentenfunktion durch Schnitte aufstellen

- M(x) Funktion
  - Bereich 1

$$M\left(x_1\right) = M_A + A_v \cdot x_1 = -450 + 100x_1$$
$$V\left(x_1\right) = A_v = 100$$

  - Bereich 2

$$M\left(x_2\right) = 100 \cdot x_2 - \frac{q \cdot x_2^2}{2} = 100x_2 - 25x_2^2$$

- Differentialgleichung
  - Bereich 1

$$EIw_1(x_1) = 225x_1^2 - \frac{50}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2$$

  - Bereich 2

$$EIw_2(x_2) = -\frac{50}{3}x_2^3 + \frac{25}{12}x_2^4 + D_1x_2 + D_2$$

- Randbedingungen & Übergangsbedingungen
  - Einspannung

$$w_1(x_1 = 0\,\mathrm{m}) = 0$$
$$w_1'(x_1 = 0\,\mathrm{m}) = 0$$

  - Momentengelenk

$$w_1(x_1 = 4{,}50\,\mathrm{m}) = w_2(x_2 = 0\,\mathrm{m})$$

  - Verschiebliches Auflager

$$w_2(x_2 = 4\,\mathrm{m}) = 0$$

- Biegelinie
  - Bereich 1

$$w_1(x_1) = \left(225x_1^2 - \frac{50}{3}x_1^3\right) \cdot \frac{1}{EI}$$

  - Bereich 2

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{50}{3}x_2^3 + \frac{25}{12}x_2^4 - 626,042x_2 + 3037,5\right)$$

b)

$$\varphi_B = -w_2'(x_2 = 4\,\mathrm{m}) = \frac{892,71}{EI}$$

Aufgabe 4: Spannungs- & Durchbiegungsberechnung

a) Querschnittswerte aus Tabelle

b) maximale Biegespannung am Auflager B

$$\sigma_{B,max}(y=-1;z=8)=\frac{1}{\Delta}\left(M_y\cdot I_z\cdot z+M_y\cdot I_{yz}\cdot y\right)=430{,}8\,\mathrm{N/mm^2}$$

c) Durchbiegung

$$\Delta=I_y\cdot I_z-I_{yz}^2$$
$$w(x)=-\frac{I_z}{E\Delta}\cdot\left(-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}qlx^3-\frac{1}{6}ql^2x^2\right)$$

$$w_B=w(x=4\,\mathrm{m})=0{,}056\,32\,\mathrm{m}$$

i	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$\bar{y}_i A_i$	$\bar{z}_i A_i$	$\bar{y}_i-\bar{y}_s$	$\bar{z}_i-\bar{z}_s$	I_{yi}	$(\bar{z}_i-\bar{z}_s)^2 A_i$	I_{zi}	$(\bar{y}_i-\bar{y}_s)^2 A_i$	I_{yizi}	$-(\bar{y}_i-\bar{y}_s)(\bar{z}_i-\bar{z}_s)A_i$
1	20	5	1	100	20	2	-3	6,67	180	166,67	80	0	120
2	20	1	7	20	140	-2	3	166,67	180	6,67	80	0	120
3													
	40			120	160			173,33	360	173,33	160	0	240

Gesamte Fläche

$\sum A_i =$ 40 cm^2

Statische Momente

$\sum S_{\bar{z}} =$ 120 cm^3

$\sum S_{\bar{y}} =$ 160 cm^3

Schwerpunkt Gesamtfläche

$\bar{y}_s =$ 3 cm

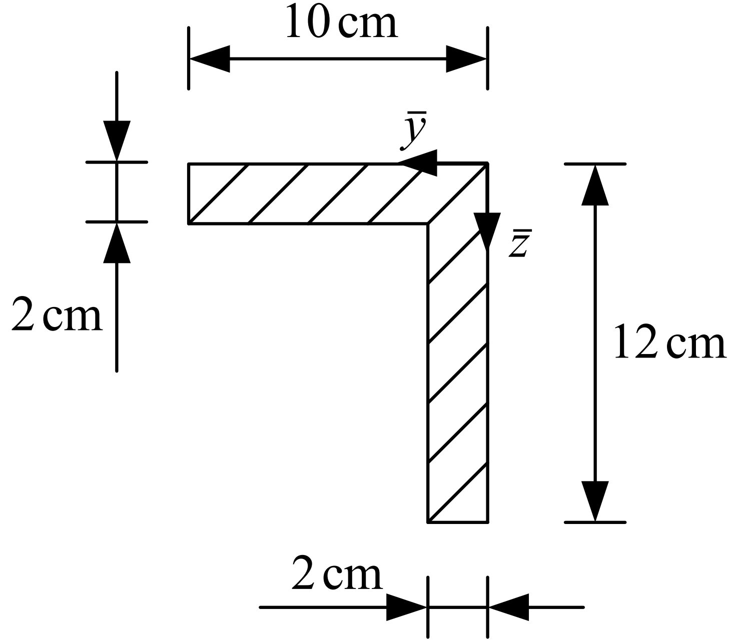
$\bar{z}_s =$ 4 cm

Trägheitsmomente

$I_y =$ 533,33 cm^4

$I_z =$ 333,33 cm^4

$I_{yz} =$ 240 cm^4



Aufgabe 5: Schubspannungsberechnung

a) Querschnittswerte

i	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$\bar{y}_i A_i$	$\bar{z}_i A_i$	$\bar{y}_i-\bar{y}_s$	$\bar{z}_i-\bar{z}_s$	I_{yi}	$(\bar{z}_i-\bar{z}_s)^2 A_i$
1	100	15	17,5	1500	1750		0	208,33	0
2	175	2,5	17,5	437,5	3062,5		0	17864,6	0
3									
	275			1937,5	4812,5			18072,9	0

Gesamte Fläche

$\sum A_i =$ 275 cm²

Statische Momente

$\sum S_{\bar{z}} =$ 1937,5 cm³

$\sum S_{\bar{y}} =$ 4812,5 cm³

Schwerpunkt Gesamtfläche

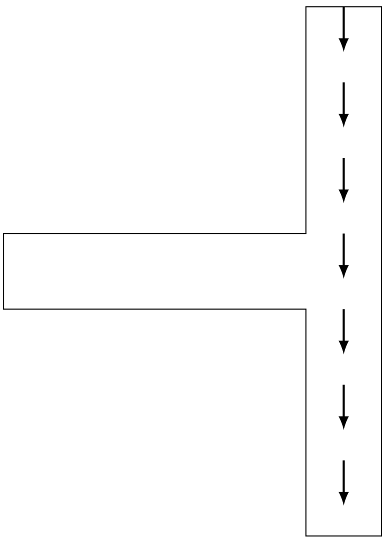
$\bar{y}_s =$ 7,05 cm

$\bar{z}_s =$ 17,5 cm

Trägheitsmomente

I_y = 18072,9 cm⁴

b) Schubspannungssverlauf skizziert

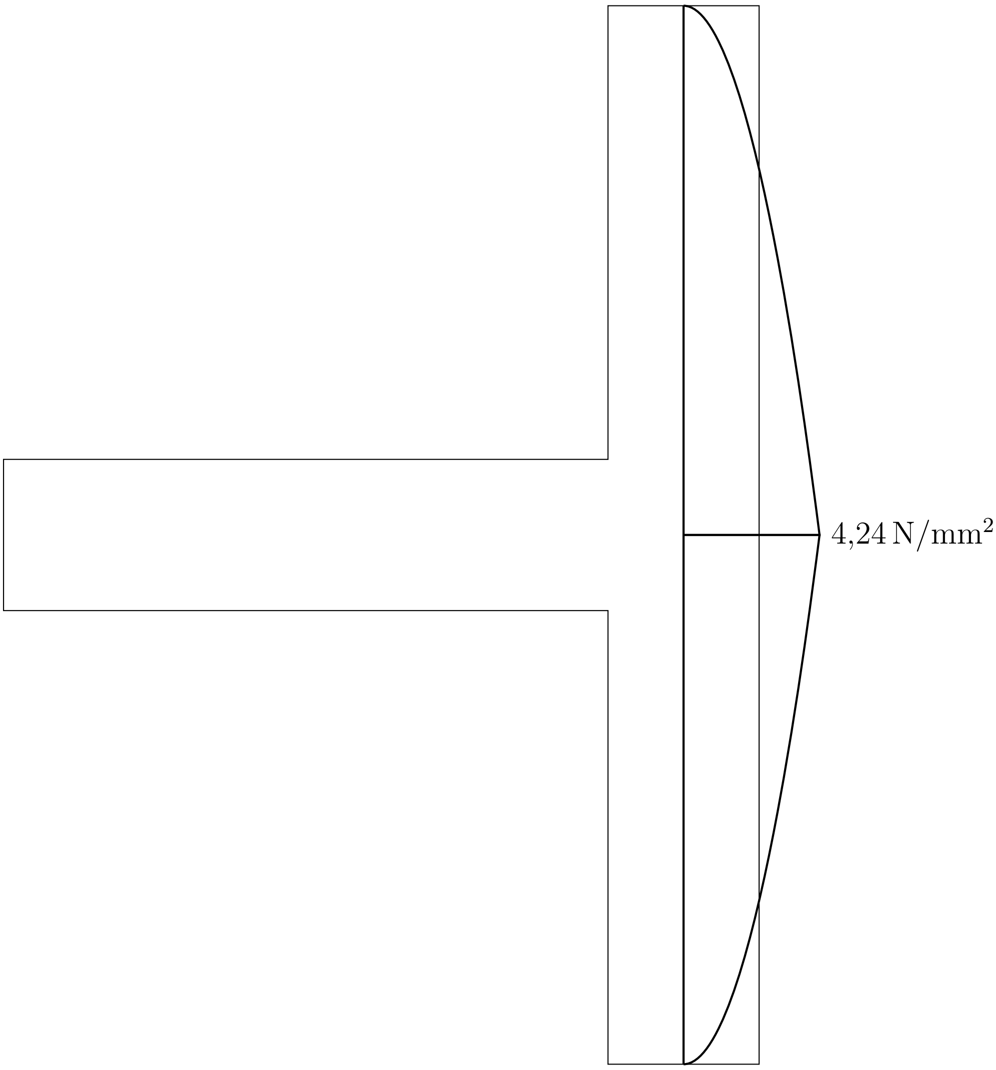


c) Schubspannungsverlauf

$$S_{y,1-1} = 0\,\mathrm{cm}^3$$
$$S_{y,2-2} = 765{,}6\,\mathrm{cm}^3$$

$$\tau_{xz}^{2-2} = 4{,}24\,\mathrm{N/mm}^2$$

c) Schubspannungsverlauf



Aufgabe 6: Torsionsmoment

a) Querschnittswerte: Torsionsträgheitsmoment

$$I_T = \frac{(2 * A_m)^2 \cdot t}{U} = 9656{,}781\,\mathrm{cm}^4$$
$$A_m = 312{,}5\,\mathrm{cm}^2$$
$$U = 80{,}902\,\mathrm{cm}$$

b) Torsionsspannung

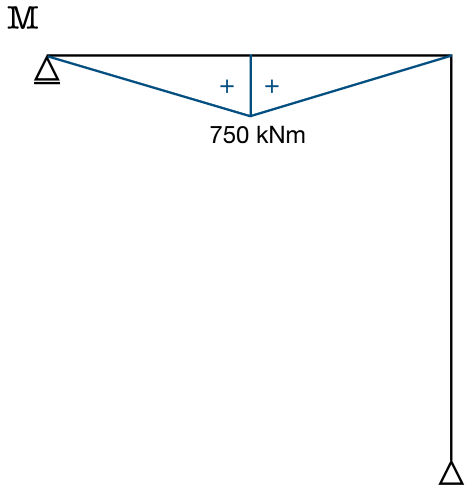
$$\tau_{max} = \frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t} = 400\,\mathrm{N/mm}^2$$

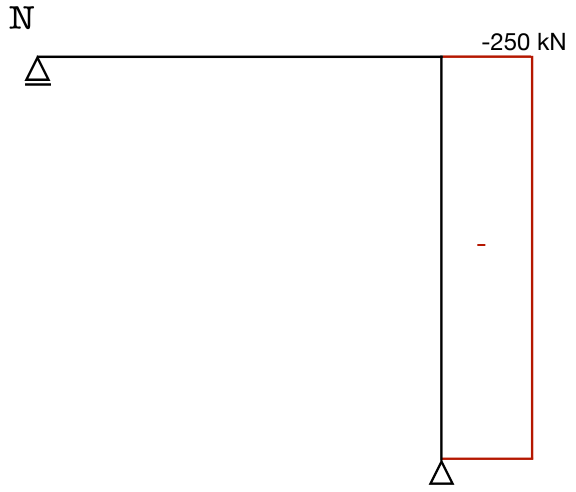
c) Verdrehung aus Torsion

$$\varphi = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_T} = 0{,}388\,\mathrm{rad} = 22{,}25°$$

Aufgabe 7: Arbeitssatz & Prinzip der virtuellen Kräfte

a) Bestimmung der vertikalen Verschiebung v_i in Balkenmitte



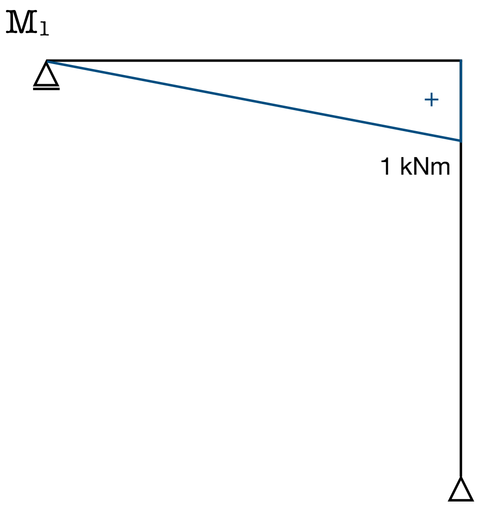


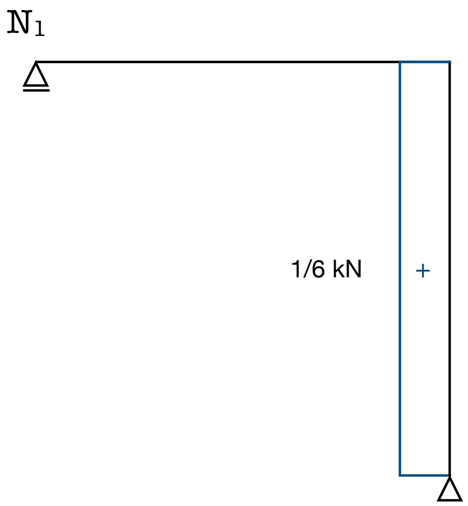
$$W = \frac{1}{2} F \cdot v_i = 250 \cdot v_i$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \left[1 \cdot \frac{(-250)^2 \cdot 6}{200000} + \frac{2}{3} \cdot \frac{750^2 \cdot 3}{25000} \right] = 23,4375$$

$$W = \Pi \Rightarrow v_i = 0{,}093\,75\,\mathrm{m} = 9{,}375\,\mathrm{cm}$$

b) Bestimmung der Verdrehung φ_C





$$\delta W = \bar{M} \cdot \varphi_C = \varphi_C$$

$$\delta W = 1 \cdot \frac{\frac{1}{6} \cdot (-250) \cdot 6}{200000} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 750 \cdot 3}{25000} + \frac{1}{6} \cdot \frac{750 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) \cdot 3}{25000} = 0,04375$$

$$\delta \Pi = \delta W \Rightarrow \varphi_C = 0,04375$$