Baumechanik II
Musterlösung Probeklausur 2

Aufgabe 1: Stabgleichungen

a) Bestimmung der Normalkräfte

$$\begin{aligned} A_{B_B} &= (0,5\,\mathrm{m})^2 = 0,25\,\mathrm{m}^2 \\ A_{St} &= 4 \cdot \frac{\pi \cdot D_{St}^2}{4} = 7,854 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \\ A_{B_N} &= A_{B_B} - A_{St} = 0,242\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

$$N_B = \sigma_{zul} \cdot A_{B_N} = 2,6 \cdot 10^3\,\mathrm{kN/m}^2 \cdot 0,242\,\mathrm{m}^2 = 629,58\,\mathrm{kN}$$

$$\varepsilon_{St} = \varepsilon_B \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

$$\underbrace{\frac{N_{St}}{E_{St} \cdot A_{St}}}_{\varepsilon_{St}} = \underbrace{\frac{N_B}{E_B \cdot A_{B_N}}}_{\varepsilon_B}$$

$$\Rightarrow \qquad N_{St} = N_B \cdot \frac{E_{St} \cdot A_{St}}{E_b \cdot A_{B_N}} = 138,42\,\mathrm{kN}$$

b) Bestimmung der Zugkraft F

$$F = N_{St} + N_B = 138,42\,\mathrm{kN} + 629,58\,\mathrm{kN} = 768\,\mathrm{kN}$$

c) Verlängerung Δl des Stabes

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 \quad \text{z. B. mit } \varepsilon_{St}$$

$$\Delta l = \Delta l_{St} = \Delta l_B = \frac{N_{St} \cdot l}{E_{St} \cdot A_{St}} = \frac{138,42 \cdot 4}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 7,854 \cdot 10^{-3}} = 3,357 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 2: Ebener Spannungszustand

a) Maximale Schubspannung τ_{xy}

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\Rightarrow 130 = \frac{90+40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90-40}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\Rightarrow \tau_{xy} = 60\,\mathrm{N/mm^2}$$

b) Hauptnormalspannung σ_2 und Winkel der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_2 = \frac{90+40}{2} - \sqrt{\left(\frac{90-40}{2}\right)^2 + 60^2} = 0\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot 60}{90-40} = 2,4$$
$$\Rightarrow \quad \varphi^* = \frac{1}{2}\arctan(2,4) = 33,69^\circ$$

c) Hauptdehnungen

$$G = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{1+\nu} = 80\,769{,}23\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y)/E &&= 3,714\cdot 10^{-4}\\
\varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\cdot\sigma_x)/E &&= 6,190\cdot 10^{-4}\\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G &&= 7,429\cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$
$$\varepsilon_1 = 2,167\cdot 10^{-4} + 4,024\cdot 10^{-4} = 6,19\cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_2 = 2,167\cdot 10^{-4} - 4,024\cdot 10^{-4} = -1,86\cdot 10^{-4}$$

d) Maximale Schubspannung τ_{max}, Mittelspannung σ_M und zugehörige Richtung

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm 65\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 65\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$\varphi** = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) = -11{,}31^\circ$$

Aufgabe 3: Differentialgleichung der Biegelinie

a) Biegemomentenverlauf $M(x)$ und Biegelinie $w(x)$

- Differentialgleichung aufstellen und integrieren

$$
\begin{aligned}
EIw^{IV} &= q(x) = 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \\
EIw^{III} &= \frac{12}{\pi} \cdot 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + C_1 \\
EIw^{II} &= -\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + C_1 x + C_2 \\
EIw^{I} &= -\left(\frac{12}{\pi}\right)^3 \cdot 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw &= \left(\frac{12}{\pi}\right)^4 \cdot 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

- Randbedingungen und Integrationskonstanten

$$
\begin{aligned}
&1.\ w^{'}(x=0) = 0 \qquad && 2.\ w(x=0) = 0 \\
&3.\ w^{'}(x=l) = 0 \qquad && 4.\ w(x=l) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad
\begin{aligned}
C_1 &= -50,759 \qquad & C_2 &= \quad 338,046 \\
C_3 &= \quad 0,000 \qquad & C_4 &= -4257,508
\end{aligned}
$$

- $M(x)$ und $w(x)$

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + 50,759x - 338,046 \\
w(x) &= \frac{1}{EI}\left(\left(\frac{12}{\pi}\right)^4 \cdot 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) - 8,46x^3 + 169,023x^2 - 4257,508\right)
\end{aligned}
$$

b) Maximales Feldmoment

- Ort des maximalen Feldmomentes

$$
\begin{aligned}
V(x) = -EIw^{III} &= -\frac{12}{\pi} \cdot 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + 50,759 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \qquad x_{max} &= \operatorname{asin}(0,6644) \cdot \frac{12}{\pi} = 2,7758\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

- Maximales Feldmoment

$$
M_{max} = M(x = x_{max}) = 20,937\,\mathrm{kNm}
$$

Aufgabe 4: Schiefe Biegung

a) Querschnittswerte

$$\overline{y}_s = 5{,}515\,\text{cm} \qquad \overline{z}_s = 5{,}818\,\text{cm}$$
$$I_y = 1579{,}64\,\text{cm}^4 \quad I_z = 1352{,}89\,\text{cm}^4 \quad I_{yz} = 131{,}62\,\text{cm}^4$$

Hinweis: Das Koordinatensystem wurde in die obere rechte Ecke gelelegt

b) Maximale Biegespannung

$$\sigma = \frac{1}{\Delta}\left[(M_y \cdot I_z - M_z \cdot I_{yz}) \cdot z - (M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}) \cdot y\right]$$
$$M_y = M_B = 40\,\text{kNm} \qquad M_z = 0$$

Spannungen an 4 Ecken:
$$\begin{aligned}
\sigma(-5,515; -5,818) &= -16{,}22\,\text{kN/cm}^2\\
\sigma(6,485; -5,818) &= -13{,}25\,\text{kN/cm}^2\\
\sigma(-5,515; 6,182) &= 14{,}41\,\text{kN/cm}^2\\
\sigma(4,485; 6,182) &= 16{,}89\,\text{kN/cm}^2
\end{aligned}$$

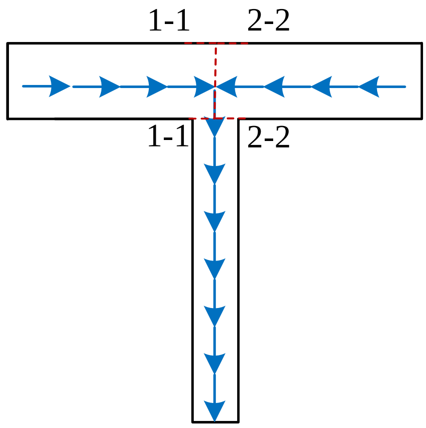
$$\Rightarrow \qquad \sigma_{max} = 16{,}89\,\text{kN/cm}^2 \mathrel{\hat{=}} 168{,}9\,\text{N/mm}^2$$

c) Spannungsnulllinie

$$\sigma = 2,553 \cdot z + 0,248 \cdot y \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad y(z) = -10,294 \cdot z$$

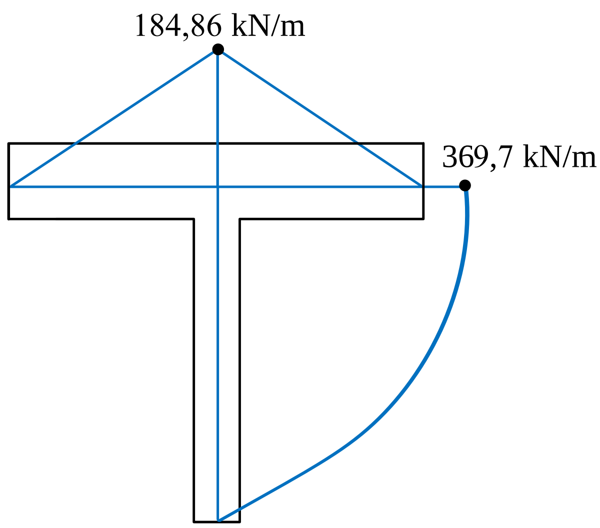
Aufgabe 5: Schubspannungsberechnung

a) Schubspannungsverlauf im Querschnitt und Schnitte



b) Schubflussverlauf

$$
\begin{aligned}
S_{y,1-1} &= \ 1107\,\mathrm{mm}^3 \\
S_{y,2-2} &= 1107\,\mathrm{mm}^3 \\
S_{y,3-3} &= 2214\,\mathrm{mm}^3 \\
T_{1-1} &= 184{,}87\,\mathrm{kN/m} \\
T_{2-2} &= 184{,}87\,\mathrm{kN/m} \\
T_{3-3} &= 369{,}74\,\mathrm{kN/m}
\end{aligned}
$$



Aufgabe 6: Torsion

a) Querschnittswerte: Torsionsträgheitsmoment

$$\begin{aligned} I_{T,1} &= \frac{\pi \cdot r_a^4}{2}\left(1-\alpha^4\right) \\ &= \frac{\pi \cdot D_a^4}{32}\left(1-\alpha^4\right) \\ &= \frac{\pi \cdot 30^4}{32}\left(1-\frac{1}{3^4}\right) = 78\,539{,}82\,\mathrm{cm}^4 \\ I_{T,2} &= \frac{\pi \cdot r_a^4}{2} = 251\,327{,}31\,\mathrm{cm}^4 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{r_i}{r_a} = \frac{D_i}{D_a} = \frac{1}{3}$$

b) Schubspannung

$$\begin{aligned} \tau_{max,1} &= \frac{M_{T,1}}{W_{T,1}} = \frac{M_{T,1}}{I_{T,1}} \cdot r_{1,max} = 1{,}337\,\mathrm{kN/cm}^2 = 13{,}37\,\mathrm{N/mm}^2 \\ \tau_{max,2} &= \frac{M_{T,2}}{W_{T,2}} = \frac{M_{T,2}}{I_{T,2}} \cdot r_{2,max} = 0{,}557\,\mathrm{kN/cm}^2 = 5{,}57\,\mathrm{N/mm}^2 \end{aligned}$$

c) Verdrehung aus Torsion

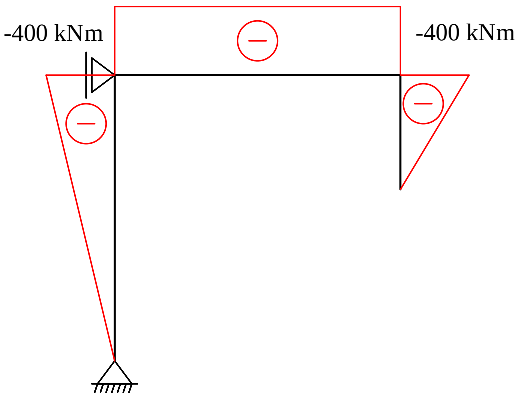
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{T,1} \cdot l_1}{G \cdot I_{T,1}} = \frac{7000 \cdot 250}{8000 \cdot 78539,82} = 0{,}002\,785\,\mathrm{rad} \mathrel{\hat{=}} 0{,}16^\circ \\ \varphi_2 &= \frac{M_{T,2} \cdot l_2}{G \cdot I_{T,2}} = \frac{7000 \cdot 500}{8000 \cdot 251327,41} = 0{,}001\,741\,\mathrm{rad} \mathrel{\hat{=}} 0{,}10^\circ \end{aligned}$$

$$\varphi_{ges} = \varphi_1 + \varphi_2 = 0{,}26^\circ$$

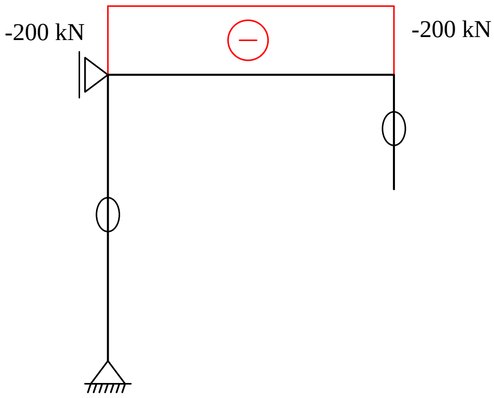
Aufgabe 7: Arbeitssatz & Prinzip der virtuellen Kräfte

a) Bestimmung der horizontalen Verschiebung u_D mithilfe des Arbeitssatzes

M-Verlauf:



N-Verlauf:



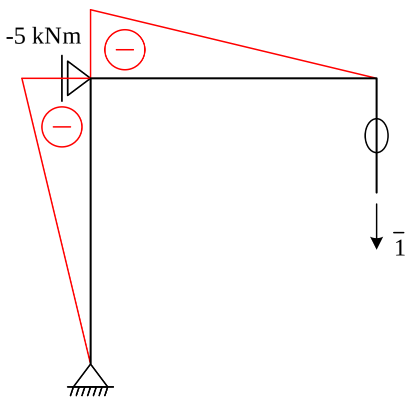
$$W = \frac{1}{2}F \cdot u_D = 100 \cdot u_D$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(-400)^2 \cdot 2}{30000} + 1 \cdot \frac{(-400)^2 \cdot 5}{30000} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-400)^2 \cdot 5}{30000} + 1 \cdot \frac{(-200)^2 \cdot 5}{100000}\right] = 20,556$$

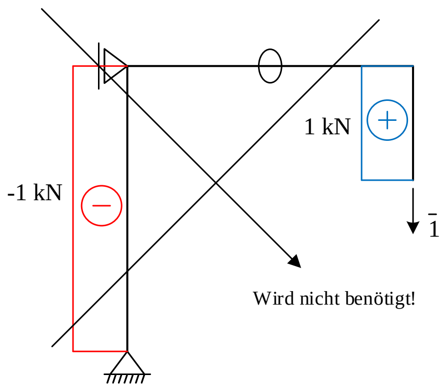
$$W = \Pi \Rightarrow u_D = 0{,}206\,\mathrm{m} \,\hat{=}\, 20{,}6\,\mathrm{cm}$$

b) Bestimmung der vertikalen Verschiebung w_D mithilfe des PvK

M_1-Verlauf:



N_1-Verlauf:



$$\delta \bar{W} = \bar{F} \cdot w_D = \bar{1} \cdot w_D$$

$$\delta\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-5) \cdot (-400) \cdot 5}{30000} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-5) \cdot (-400) \cdot 5}{30000} = 0,277$$

$$\delta\bar{\Pi} = \delta \bar{W} \Rightarrow w_D = 0{,}277\,\mathrm{m} \,\hat{=}\, 27{,}7\,\mathrm{cm}$$