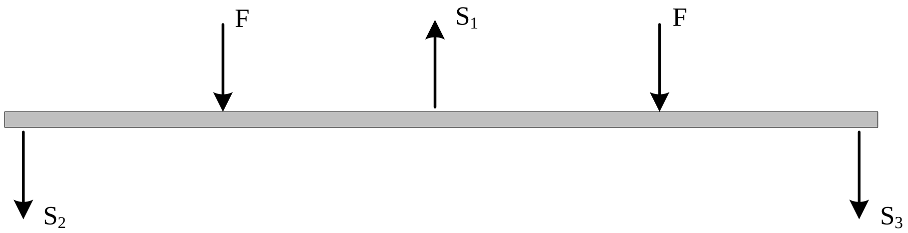
Baumechanik II
Musterlösung Modulprüfung 21.09.2017

Aufgabe 1: Stabgleichungen

a) Bestimmung der Stabkräfte



$$S_2 = S_3 \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$\uparrow: \quad -2S_2 - 2\cdot 7000 + S_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 14000 + 2S_2$$

$$\text{Bedingung:} \quad \Delta l_1 = -\Delta l_2 = -\Delta l_3$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{S_2 \cdot 6}{3000\cdot 1600} = \frac{S_1 \cdot 3}{21000 \cdot 200} = \frac{(14000+2S_2)\cdot 3}{21000\cdot 200}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_2 = -3733{,}33\,\mathrm{kN} \quad \rightarrow \quad S_1 = 6533{,}33\,\mathrm{kN}$$

$$\text{Verschiebung:} \quad \Delta l = \frac{6544,33\cdot 3}{21000\cdot 200} = 4,67\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \mathrel{\hat{=}} 4,67\,\mathrm{mm}$$

$$\text{Normalspannungen:} \quad \sigma_1 = \frac{6544,33}{200} = 32{,}67\,\mathrm{kN/cm^2}$$

$$\sigma_{2,3} = \frac{-3733,33}{1600} = -2{,}33\,\mathrm{kN/cm^2}$$

b) Bestimmung der Temperatur ΔT

$$\text{Bedingungen:} \quad |S_1| = |S_2| = |S_3| = \frac{1}{3}\cdot 2F = 4666,67\,\mathrm{kN}$$

$$|\Delta l_1| = |\Delta l_2| = |\Delta l_3|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = \frac{4666,67\cdot 3}{21000\cdot 200} + \Delta T\cdot 1,2\cdot 10^{-5}\cdot 3 \stackrel{!}{=} \Delta l_2 = \frac{4666,67\cdot 6}{3000\cdot 1600}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{2,5\cdot 10^{-3}}{1,2\cdot 10^{-5}\cdot 3} = 69,44\,\mathrm{K}$$

Aufgabe 2: Ebener Spannungszustand

a) Maximale Normalspannung σ_x

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{zul} \\
\Rightarrow \quad &= \frac{\sigma_x - \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{2\sigma_x}{2}\right)^2 + 100^2} \leq 235\,\mathrm{N/mm^2} \\
&= \sqrt{\sigma_x^2 + 100^2} \leq 235\,\mathrm{N/mm^2} \\
\Rightarrow \quad & \sigma_x \leq 212{,}66\,\mathrm{N/mm^2}
\end{aligned}
$$

b) Hauptnormalspannung σ_2 und Winkel der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_2 = 0 - \sqrt{\sigma_x^2 + 100^2} = -235\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$
\begin{aligned}
\tan(2\varphi^*) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 100}{212,66 - (-212,66)} = 0,470 \\
\Rightarrow \quad \varphi^* &= \frac{1}{2}\arctan(0,470) = 12,59^\circ
\end{aligned}
$$

c) Hauptdehnungen

$$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1+\nu} = 80\,769{,}23\,\mathrm{N/mm^2}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)/E &&= 1,316 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)/E &&= -1,316 \cdot 10^{-3} \\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G &&= 1,238 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} \\
\varepsilon_1 &= 1,454 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_2 &= -1,454 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

d) Maximale Schubspannung τ_{max}, Mittelspannung σ_M und zugehörige Richtung

$$
\begin{aligned}
\tau_{max} &= \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm 235\,\mathrm{N/mm^2} \\
\sigma_M &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 0\,\mathrm{N/mm^2} \\
\varphi** &= \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) = -32{,}41^\circ
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Differentialgleichung der Biegelinie

a) Biegemomentenverlauf $M(x)$ und Biegelinie $w(x)$

- Differentialgleichung aufstellen und integrieren

$$\begin{aligned}
EIw^{IV} &= q(x) = \frac{10}{3}x + 20 \\
EIw^{III} &= \frac{5}{3}x^2 + 20x + C_1 \\
EIw^{II} &= \frac{5}{9}x^3 + 10x^2 + C_1x + C_2 \\
EIw^{I} &= \frac{5}{36}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \\
EIw &= \frac{1}{36}x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4
\end{aligned}$$

- Randbedingungen und Integrationskonstanten

$$\begin{array}{ll}
1.\ w(x=0) = 0 & 2.\ EIw''(x=0) = -M(x=0) = -60 \\
3.\ w(x=l) = 0 & 4.\ EIw''(x=l) = -M(x=l) = 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll}
C_1 = -70 & C_2 = -60 \\
C_3 = \ 384 & C_4 = \quad 0
\end{array}$$

- $M(x)$ und $w(x)$

$$\begin{aligned}
M(x) &= -\frac{5}{9}x^3 - 10x^2 + 70x + 60 \\
w(x) &= \frac{1}{36}x^5 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{35}{3}x^3 - 30x^2 + 384x
\end{aligned}$$

b) Maximales Feldmoment

- Ort des maximalen Biegemomentes

$$\begin{aligned}
EIw^{III} &= \frac{5}{3}x^2 + 20x - 70 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \qquad x_{max} &= 2,832\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

- Maximales Feldmoment

$$M_{max} = M(x = x_{max}) = 165,42\,\mathrm{kNm}$$

Aufgabe 4: Schiefe Biegung

a) Querschnittswerte

$$\overline{y}_s = 4{,}661\,\text{cm} \qquad \overline{z}_s = 11{,}214\,\text{cm}$$
$$I_y = 7500{,}1\,\text{cm}^4 \qquad I_z = 1599{,}8\,\text{cm}^4 \qquad I_{yz} = 583{,}4\,\text{cm}^4$$

b) Biegespannung im Punkt D

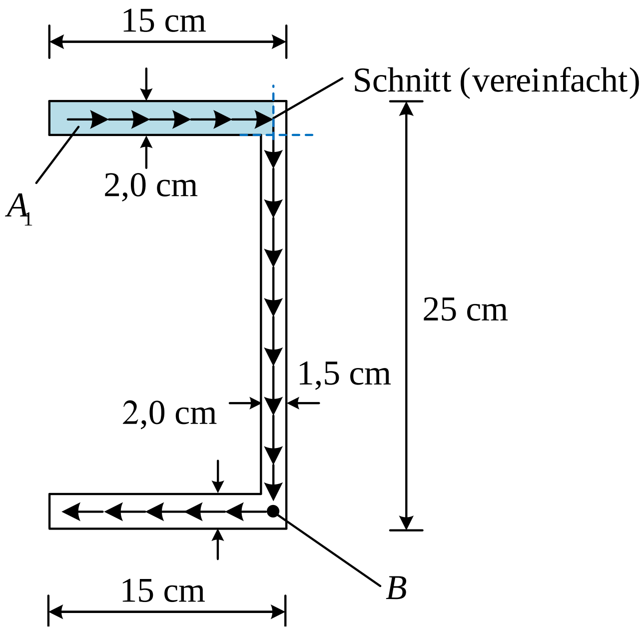
$$\sigma = \frac{1}{\Delta}\Big[(M_y \cdot I_z - M_z \cdot I_{yz}) \cdot z - (M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}) \cdot y\Big]$$
$$\sigma_D = \frac{1}{11658304,4}\Big[(9000 \cdot 1599,8 - (-3000 \cdot 583,4)) \cdot 12,786$$
$$- (-3000 \cdot 7500,1 - 9000 \cdot 583,4) \cdot 7,339\Big]$$
$$= 35{,}18\,\text{kN/cm}^2 \mathrel{\widehat{=}} 351{,}8\,\text{N/mm}^2$$

c) Spannungsnulllinie

$$\frac{z}{y} = \frac{M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}}{M_y \cdot I_z - M_z \cdot I_{yz}} = \frac{-3000 \cdot 7500,1 - 9000 \cdot 583,4}{9000 \cdot 1599,8 - (-3000) \cdot 583,4}$$
$$\Rightarrow \quad z(y) = -1,718 \cdot y$$

Aufgabe 5: Schubmittelpunkt

a) Schubspannungsverlauf im Querschnitt und Schnitte



b) Schubmittelpunkt

$$S_{y,1-1} = 14{,}25\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 11{,}5\,\text{cm} = 327{,}75\,\text{cm}^3$$

$$T_{1-1} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y} = \frac{V_z \cdot 327,75\,\text{cm}^3}{9112,63\,\text{cm}^4} = 0,03597\ V_z/\text{cm}$$

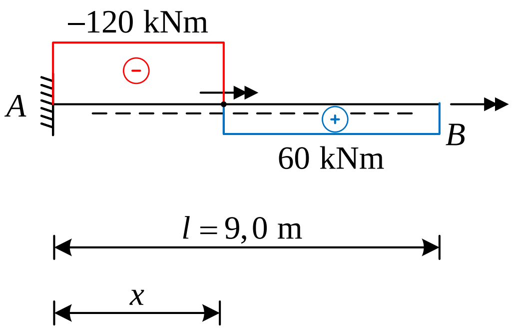
$$R_{1-1} = \frac{1}{2}\,T_{1-1} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 0,03597\,V_z/\text{cm} \cdot 14,25\,\text{cm} = 0,2563\,V_z$$

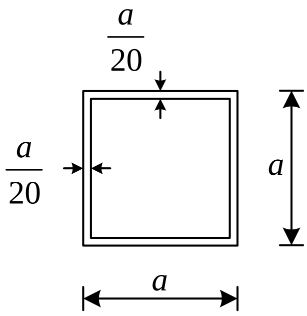
$$\curvearrowleft B: \quad V_z \cdot e_m \overset{!}{=} -R_{1-1} \cdot z_{R-B} = -0,2563\,V_z \cdot (25-1-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad e_m = -5,89\,\text{cm}$$

Aufgabe 6: Torsion

a) Torsionsmomentenverlauf





b) Dimensionierung des Querschnitts

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{12000\,\text{kNcm}}{2\cdot\left(a-\frac{a}{20}\right)^2\cdot\frac{a}{20}} \leq 13\,\text{kN/cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{361}{4000}a^3 \geq \frac{12000}{13} \qquad \Rightarrow \quad a^3 \geq 10228\,\text{cm}^3$$

$$\Rightarrow \quad a \geq 21,71\,\text{cm}$$

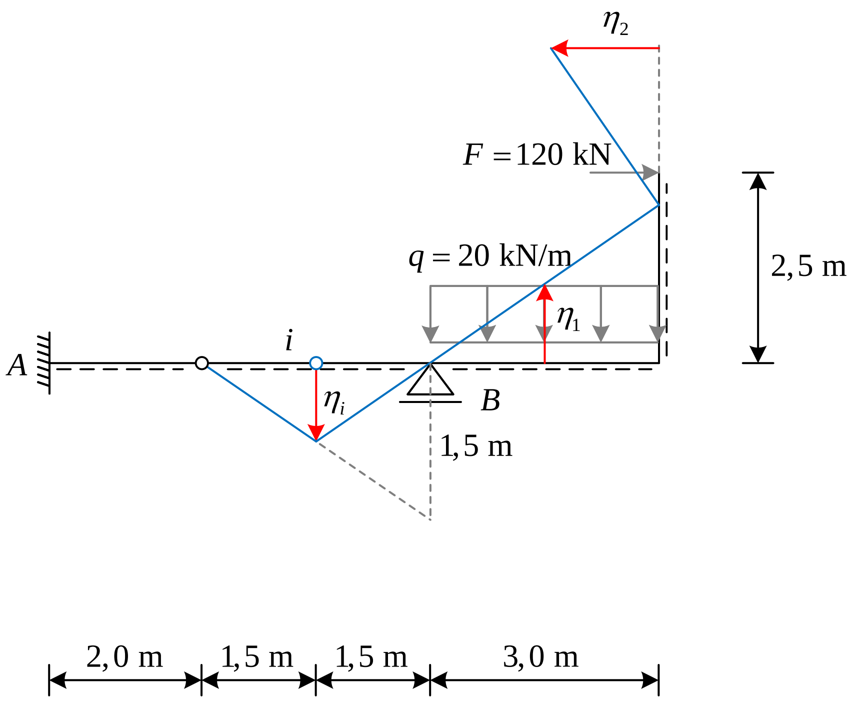
c) Verdrehung aus Torsion

$$\varphi_l = \frac{60\cdot(9-x)}{G\cdot I_T} + \frac{-120\cdot x}{G\cdot I_T} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 180x = 540 \quad \Rightarrow \quad x = 3,0\,\text{m}$$

Aufgabe 7: Prinzip der virtuellen Verschiebungen

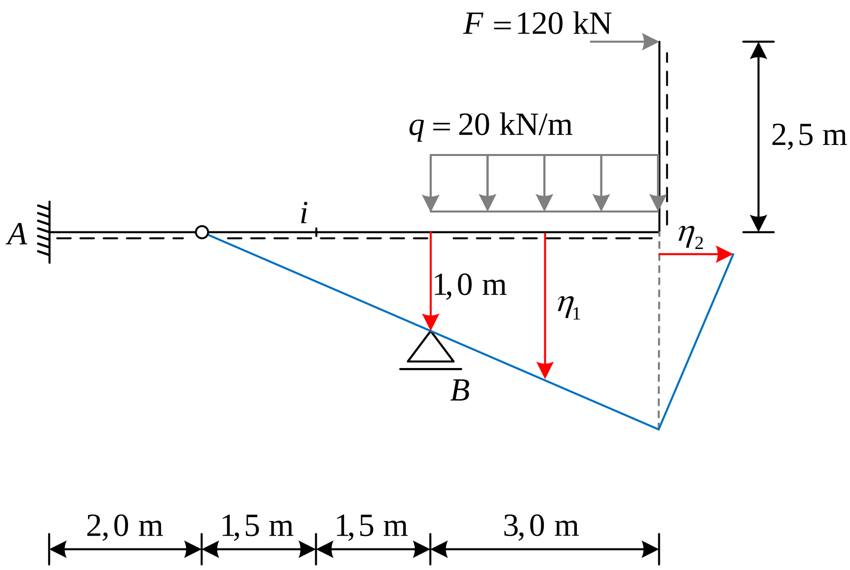
a) Bestimmung des Biegemomentes M_i an der Stelle i mithilfe des PvV



$$\frac{\eta_i}{1,5} = \frac{1,5}{3} \quad \Rightarrow \quad \eta_i = 0,75$$
$$\frac{\eta_1}{1,5} = \frac{\eta_i}{1,5} \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = 0,75$$
$$\frac{\eta_2}{2,5} = \frac{\eta_i}{1,5} \quad \Rightarrow \quad \eta_2 = 1,25$$

$$M_i \cdot 1,0 = 20\,\mathrm{kN/m} \cdot 3,0\,\mathrm{m} \cdot (-0,75\,\mathrm{m}) + 120\,\mathrm{kN} \cdot (-1,25\,\mathrm{m}) = -195\,\mathrm{kNm}$$

b) Bestimmung der vertikalen Auflagerkraft B_v mithilfe des PvV



$$\frac{1}{3} = \frac{\eta_1}{4,5} \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = 1,50$$
$$\frac{\eta_2}{2,5} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \eta_2 = \frac{5}{6}$$

$$B_v \cdot 1,0\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3,0\,\mathrm{m} \cdot 1,50\,\mathrm{m} + 120\,\mathrm{kN} \cdot \frac{5}{6}\,\mathrm{m} = 190\,\mathrm{kNm}$$
$$\Rightarrow B_v = 190\,\mathrm{kN}$$