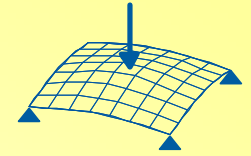


2.2.3 Impulssatz und Stoß



Newton: $m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

$$m \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}' = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'$$



$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'$$

Impulssatz

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Impulssatz:

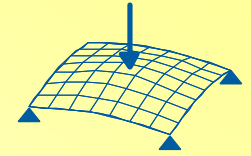
Änderung des Impulses ist gleich dem Zeitintegral über die Kraft!

Sonderfall: $\vec{F} = 0$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\vec{v}_0 = \text{const.}$$

Impulserhaltungssatz

2.2.3 Impulssatz und Stoß



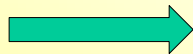
Stoß:

Eine sehr große Kraft wirkt über einen sehr kleinen Zeitraum (Stoßdauer).

Folge:

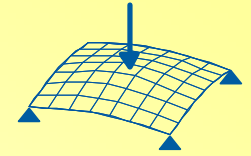
Plötzliche Geschwindigkeitsänderung eines Massenpunktes.

Stoßkraft: $\hat{\vec{F}} = \int_0^{t_s} \vec{F}(t) dt$



$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \hat{\vec{F}}$$

2.2.4 Momentensatz



Momentenvektor bzgl. eines Punktes 0:

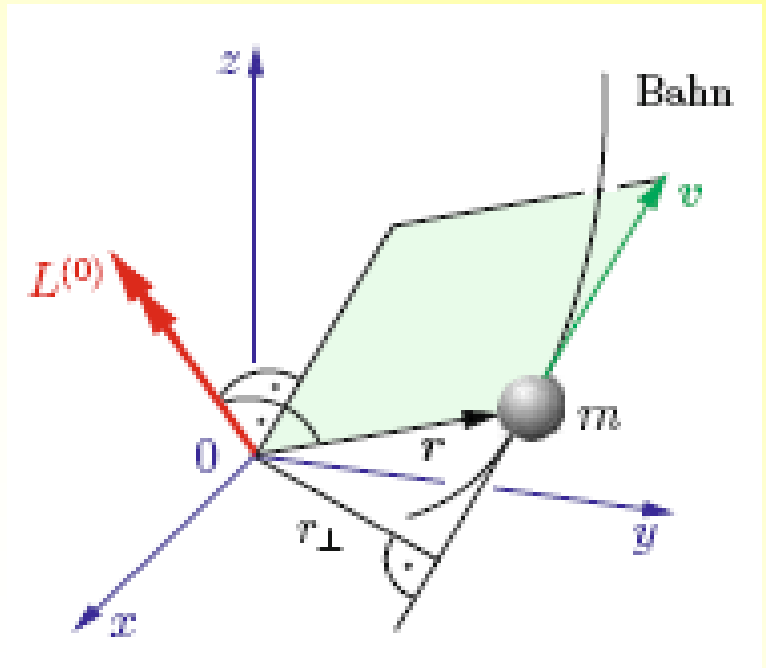
$$\vec{M}^0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehimpulsvektor bzw. Drallvektor:

$$\vec{L}^0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Betrag des Drehimpulsvektors:

$$L^0 = |\vec{L}^0| = r_{\perp} \cdot m |\vec{v}|$$

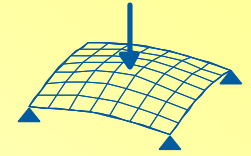


Momentensatz, Drehimpulssatz, Drallsatz:

$$\frac{d\vec{L}^0}{dt} = \vec{M}^0$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Moment der wirkenden Kraft!

2.2.4 Momentensatz



Sonderfall: $\vec{M}^0 = 0$

$$\frac{d\vec{L}^0}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{L}^0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const.}}$$

Drehimpulserhaltungssatz

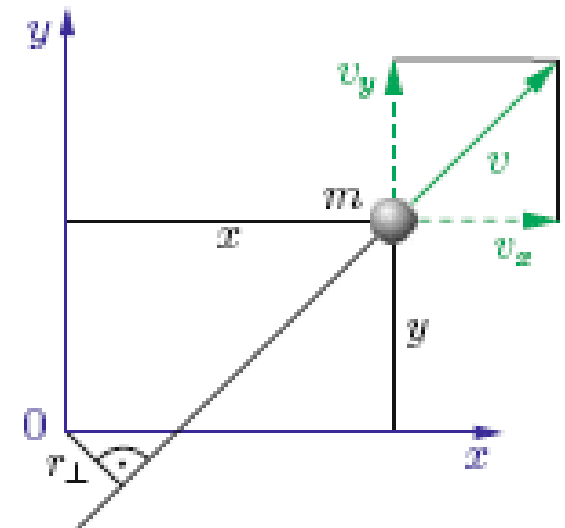
Drehimpulssatz für die Bewegung eines Massenpunktes in der x-y-Ebene:

$$\boxed{\frac{dL_z^0}{dt} = M_z^0}$$

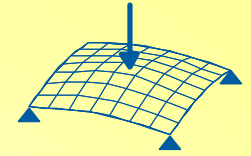
oder

$$\boxed{\frac{dL^0}{dt} = M^0}$$

$$L^0 = r_{\perp} m |\vec{v}| = m(xv_y - yv_x)$$



2.2.4 Momentensatz



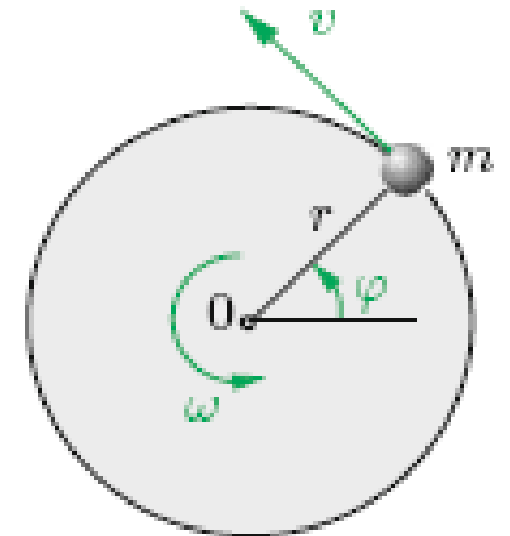
Sonderfall: Kreisbewegung

$$v = r\dot{\varphi} = r\omega$$

$$L^0 = mrv = mr^2\omega$$

$$\frac{dL^0}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = mr^2\ddot{\varphi} = \theta^0\ddot{\varphi}$$

$$\longrightarrow \boxed{\theta^0\ddot{\varphi} = M^0}$$



$$\boxed{\theta^0 = mr^2}$$

Massenträgheitsmoment

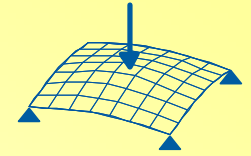
Translationsbewegung:

$$\boxed{m\ddot{x} = F}$$

Rotationsbewegung:

$$\boxed{\theta^0\ddot{\varphi} = M^0}$$

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



Kinetische Energie: $E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2$

Arbeit einer Kraft: $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$

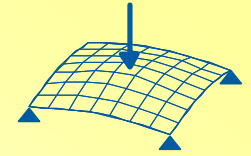
Arbeitssatz:

$$E_{k1} - E_{k0} = W$$

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Arbeit der äußeren Kräfte!

Einheit der Energie und Arbeit: [Nm] = [J] (Joule)

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Einheit der Leistung: [Nm/s] = [W] (Watt)

1kW=1.36PS bzw. 1PS=0.735kW

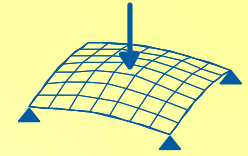
Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{W_N}{W_A} = \frac{P_N}{P_A} \leq 1$$

Konservative Kräfte:

Eine Kraft ist konservativ, wenn sie ein Potential E_p besitzt. E_p wird auch als potentielle Energie bezeichnet.

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



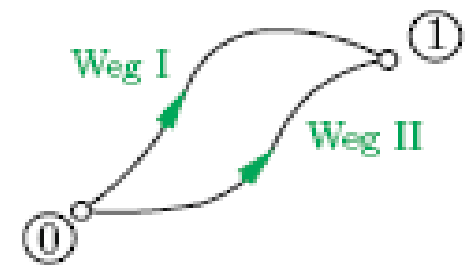
$$\vec{F} = -\text{grad}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$



$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Die Arbeit einer konservativen Kraft zwischen 2 festen Punkten ist *wegunabhängig*:

$$W = \int_{\text{Weg I}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\text{Weg II}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

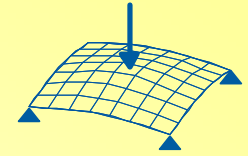


Bedingung für ein konservatives Kraftfeld:

$$\text{rot}(\vec{F}) = 0$$

Ein konservatives Kraftfeld ist rotationsfrei bzw. wirbelfrei!

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

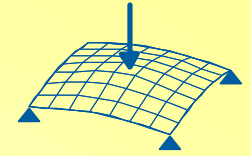
$$\boxed{\text{rot}(\vec{F}) = 0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}}$$

Beziehung zwischen W und E_p bei einer konservativen Kraft:

$$W = \int_{(0)}^{(1)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(0)}^{(1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = - \int_{(0)}^{(1)} \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right) = - (E_{p1} - E_{p0})$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{W = - (E_{p1} - E_{p0})}$$

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



Einsetzen in den Arbeitssatz liefert

Energiesatz:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = \text{const.}$$

Die gesamte Energie bleibt bei einer Bewegung immer konstant!

Beispiele:

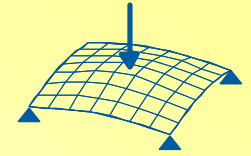
Gravitationspotential der Gewichtskraft:

$$E_p = G \cdot z$$

Federpotential:

$$E_p = \frac{1}{2} c x^2$$

2.2.5 Arbeitssatz und Energiesatz



Bemerkungen:

Reibungskraft besitzt kein Potential und ist *nicht konservativ*. Sie ist *dissipativ*, da durch Reibungskraft mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird. *Der Energiesatz gilt daher nicht, der Arbeitssatz gilt aber.* Man muss in W die Arbeit der Reibungskraft berücksichtigen.

Reaktionskräfte bzw. Zwangskräfte leisten keine Arbeit, da sie immer senkrecht zur Bewegungsbahn wirken.