Aufgabensammlung 2

Aufgabe 1: Kinematik

Zwei Haltestellen sind 150 m voneinander entfernt. Eine Straßenbahn fährt geradlinig mit einer konstanten Beschleunigung a_A von der einen Haltestelle an und erreicht ihre Fahrgeschwindigkeit von 54 km/h nach 12 s.
Unmittelbar nach erreichen der Fahrgeschwindigkeit betätigt der Fahrer die Bremsen, um die Bahn mit einer ebenfalls konstanten Bremsverzögerung a_B an der nächsten Haltestelle zum Stehen zu bringen.

Bestimmen Sie

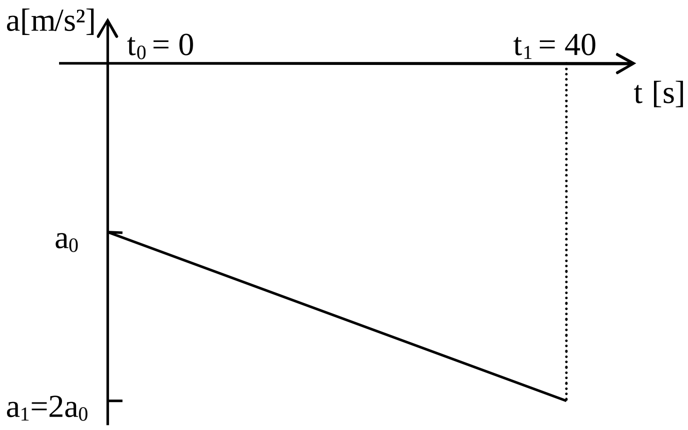
a.) die Anfahrbeschleunigung a_A und den Anfahrweg x_A,

b.) den Bremsweg x_B, die Bremsverzögerung a_B und die Bremszeit t_B.

c.) Stellen Sie den Bewegungsvorgang zwischen den beiden Haltestellen in den Diagrammen $a(t)$, $v(t)$ und $x(t)$ dar.

Aufgabe 2: Kinematik

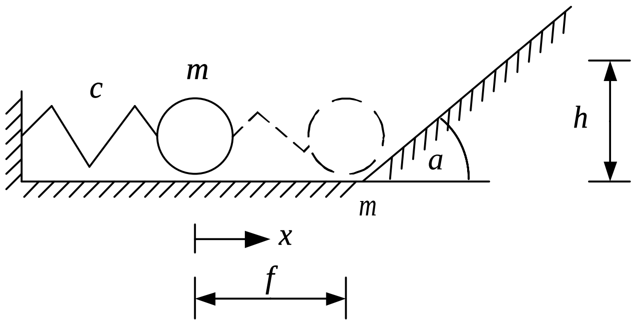
Die Bremsverzögerung eines Fahrzeugs ist durch das folgende Diagramm gegeben.



Wie groß ist a_0, wenn das Fahrzeug zur Zeit t_0 noch mit v_0 fährt und zur Zeit t_1 zum Stillstand gekommen ist? Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 72\,\text{km/h}$.

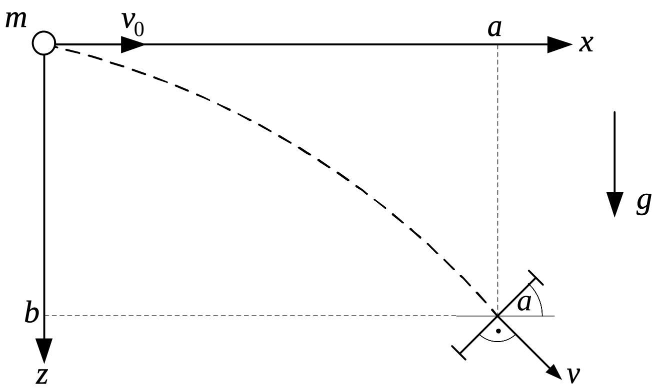
Aufgabe 3: Kinetik – Aufstellen der Bewegungsgleichung

Vor einer um die Strecke f zusammengedrückten Feder mit der Federkonstante c liegt ein Massenpunkt mit der Masse m. Die Punktmasse wird aus der Ruhelage losgelassen. Bis auf welche Höhe h rutscht der Massenpunkt die schiefe Ebene hinauf? Beachten Sie den Bewegungswiderstand m für den gesamten Vorgang!



Aufgabe 4: Kinetik – Schiefer Wurf

Ein horizontal beginnender Wurf (Luftwiderstand vernachlässigbar) soll so ausgeführt werden, dass der geworfene Ball (Masse m) orthogonal durch einen Ring fliegt, der den horizontalen Abstand a von der Abwurfstelle hat und unter dem Winkel a gegen die Horizontale geneigt ist.



a.) Wie müssen dabei der vertikale Abstand b und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden?

b.) Welche Geschwindigkeit v hat der Ball beim Passieren des Rings?

Aufgabe 5: Kinetik – Impulssatz

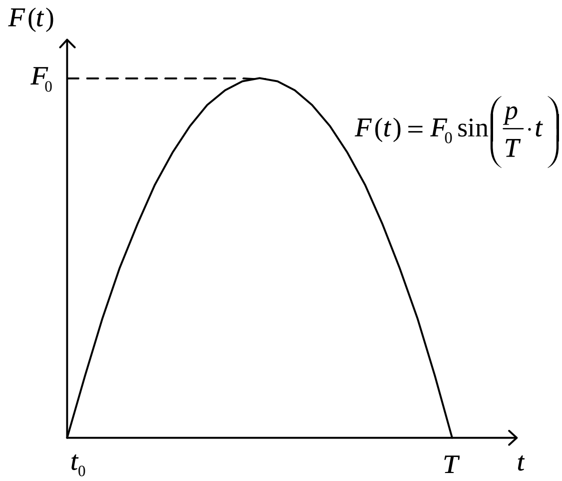
Die Laufkatze eines Kranes hat 1100 kg Eigengewicht und soll mit einer Last von 10 t aus dem Stillstand in 4 s auf eine Fahrgeschwindigkeit von 20 m/min beschleunigt werden. Welche Antriebskraft F_a ist bei einem Fahrwiderstand von $m = 0,02$ erforderlich?

Aufgabe 6: Kinetik – Impulssatz

Ein Golfspieler schlägt einen Ball ab. Der daraus resultierende Kraftstoß wird dabei in der Zeit von $T = 1/6\,\text{s}$ aufgebracht. Die maximale Kraft während des Stoßes beträgt $F_0 = 114\,\text{N}$.

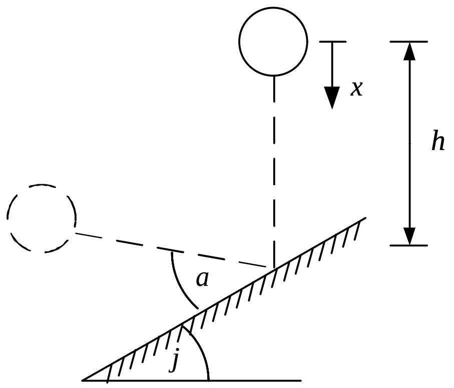
Man nehme den im Diagramm dargestellten zeitlichen Kraftverlauf an. Der Ball besitzt eine Masse von $m = 150\,\text{g}$.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit mit der der Golfball wegfliegt.



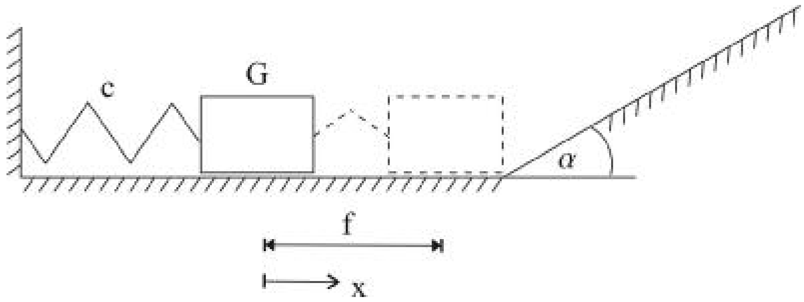
Aufgabe 7: Kinetik – Stoß

Eine Kugel mit der Masse m wird aus der Ruhelage von einer Höhe h fallengelassen und trifft auf die unter einem Winkel $j = 30°$ geneigte starre, glatte Platte. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel direkt nach dem Stoß und den Winkel a, für eine Stoßzahl $e = 0,5$.



Aufgabe 8: Kinetik - Energiesatz

Vor einer um die Strecke f zusammengedrückten Feder mit der Federkonstante c liegt ein Massenpunkt vom Gewicht G.



a.) Wie groß ist seine Geschwindigkeit v_A beim Ablösen von der Feder?

b.) Wie weit rutscht er die schiefe Ebene hinauf?

Die Bewegungswiderstände sind zu vernachlässigen, ($\mu = 0$). Bearbeiten Sie die Aufgabe mit Hilfe des Energiesatzes.

Aufgabe 9: Kinetik - Arbeitssatz

Bearbeiten Sie die obige Aufgabenstellung mit Hilfe des Arbeitssatzes und berücksichtigen Sie die Reibung, (Reibungskoeffizient μ).

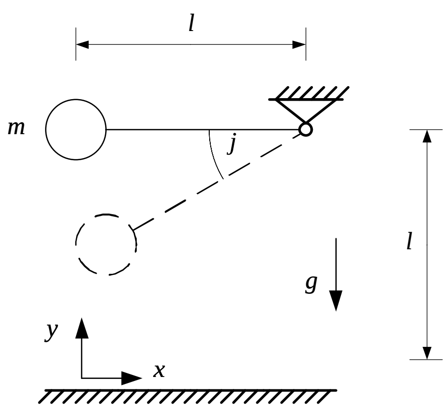
Aufgabe 10: Kinetik – Energiesatz

Ein Fadenpendel besteht aus einem masselosen Faden der Länge l und einer Punktmasse m. Das Pendel wird aus der horizontalen Ruhelage losgelassen. Bestimmen Sie mit dem Energiesatz:

a.) die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$, die der Massenpunkt erreichen kann.

b.) die Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$.

c.) den Winkel $\varphi_{\max}$, bei dem der Faden reißen wird, wenn er nur eine begrenzte Tragfähigkeit $S_{\max} = 1,5 \cdot mg$ besitzt.



Musterlösungen

Aufgabe 1

a) $a_A = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{15\ \frac{m}{s}}{12\ s} = \underline{\underline{1{,}25\ \frac{m}{s^2}}}$ (Anfahrbeschleunigung)

$x_A = 1{,}25\ \frac{m}{s^2} \cdot \dfrac{(12\ s)^2}{2} = \underline{\underline{90\ m}}$ (Anfahrweg)

b) $x_B = 150\,m - 90\,m = \underline{\underline{60\,m}}$ (Bremsweg)

gesucht: $a(x) = a_B$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot \int_{x_0}^{x} a(\bar{x})\ d\bar{x}$$

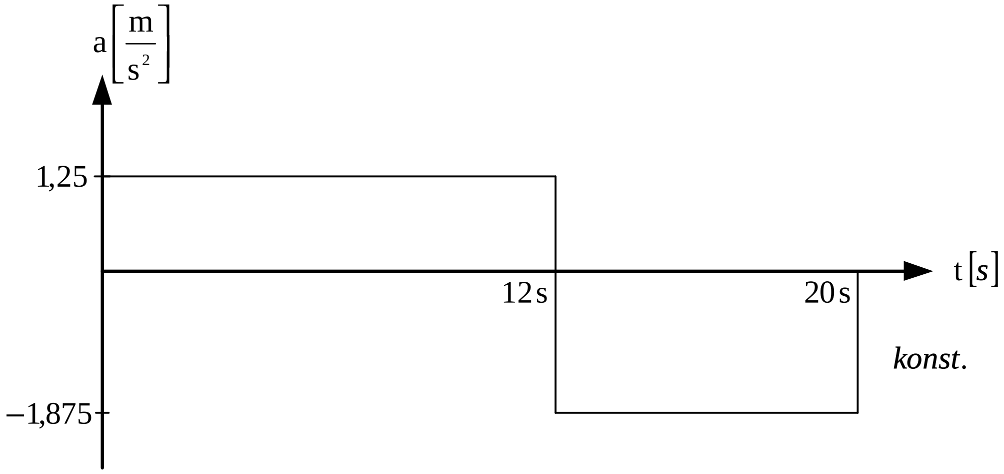
$$\Rightarrow 0 = \left(15\ \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot a_B\ (150\ m - 90\ m)$$

$a_B = -\dfrac{\left(15\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 60\ m} = \underline{\underline{-\ 1{,}875\ \frac{m}{s^2}}}$ (Bremsverzögerung)

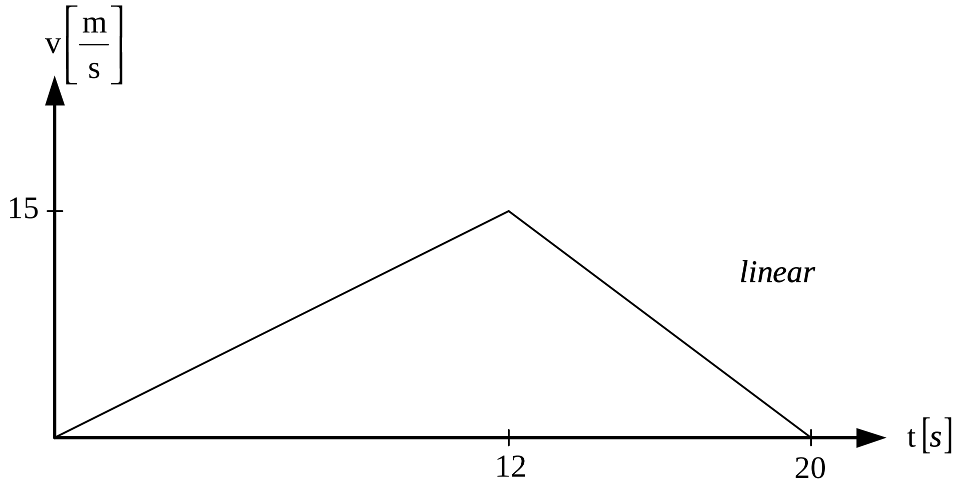
$t_B = \dfrac{-15\ \frac{m}{s}}{-1{,}875\ \frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{8\,s}}$ (Bremszeit)

$12\,s + 8\,s = \underline{\underline{20\,s}}$ (Gesamtzeit)

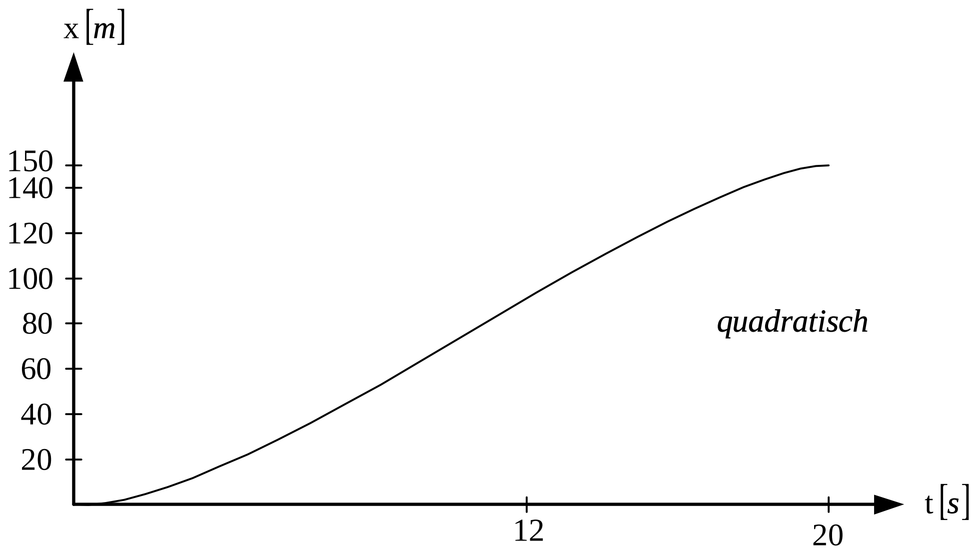
c) Beschleunigung:



Geschwindigkeit:



Strecke:



Aufgabe 2

Aufstellung der Funktion $a(t)$ z.B. mit Hilfe der Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung:

$$\frac{a-a_0}{t-t_0}=\frac{a_1-a_0}{t_1-t_0} \qquad \text{mit} \qquad a_1 = 2\cdot a_0$$

Bei $t_0 = 0$ und $t_1 = 40\,\mathrm{s}$ erhält man,

$$a(t) = a = a_0 + \frac{a_0}{40}\cdot t\,.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \qquad \rightarrow \qquad dv = a\,dt$$

$$v_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a_0 + \frac{a_0}{40}\;\bar{t}\;\; d\bar{t} = v_0 + a_0\cdot t_1 + \frac{a_0}{80}\;t_1^2$$

Gegeben: $v_1 = 0,\; t_0 = 0,\; v_0 = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s},\; t_1 = 40\,\mathrm{s}$

$$0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + a_0\cdot 40\,\mathrm{s} + \frac{a_0}{80}\cdot(40\,\mathrm{s})^2$$

$$a_0 = -\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

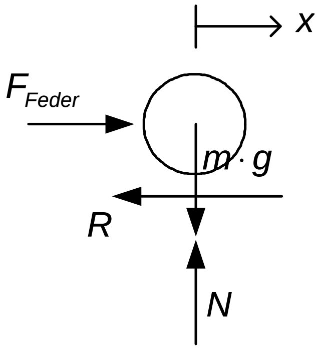
Die Bremsverzögerung a_0 beträgt $-\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Aufgabe 3

Bewegungsgleichung:

$$\rightarrow:\ m \cdot \ddot{x} = F_{Feder} - R = c \cdot (f - x) - \mu \cdot N \qquad (1)$$

$$\uparrow:\ m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g + N \qquad (2)$$



Es gilt $\ddot{y} = 0$, da der Körper an die Ebene gebunden ist. Damit folgt aus (2)

$$\Rightarrow N = m \cdot g$$

Einsetzen in (1) liefert

$$m \cdot \ddot{x} = c \cdot (f - x) - \mu \cdot m \cdot g$$

$$a = \ddot{x} = \frac{c}{m} \cdot (f - x) - \mu \cdot g$$

Integration:

$$a(x) = a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad v \cdot dv = a \cdot dx$$

$$\int_{v_0=0}^{v_1} v \cdot dv = \int_0^f \left[\frac{c}{m} \cdot (f - x) - \mu \cdot g \right] \cdot dx$$

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{v_1} = \left[\frac{c}{m} \cdot f \cdot x - \frac{c}{m} \cdot \frac{x^2}{2} - \mu \cdot g \cdot x \right]_0^f$$

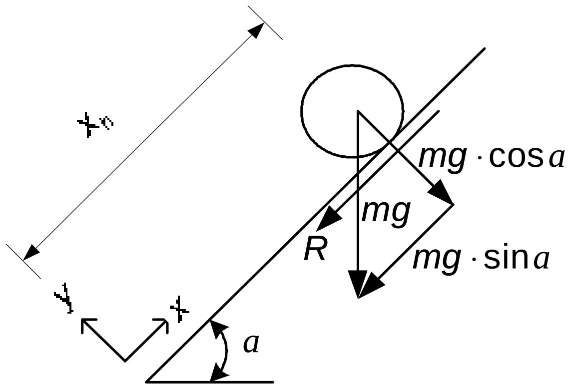
$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{c}{m} \cdot f^2 - \frac{c}{m} \cdot \frac{f^2}{2} - \mu \cdot g \cdot f$$

$$v_f = v_1 = \sqrt{\frac{c}{m} \cdot f^2 - 2 \cdot \mu \cdot g \cdot f}$$

Bewegungsgleichung:

$$\nearrow: m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha - R \qquad (3)$$

$$\nwarrow: m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g \cdot \cos\alpha + N \qquad (4)$$



Der Körper ist wieder an die Ebene gebunden.

$$\Rightarrow \ddot{y} = 0$$

$$\Rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

In (3) eingesetzt

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\ddot{x} = -g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

Integration:

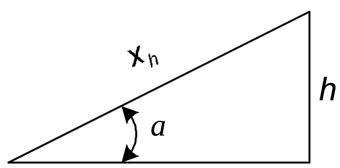
$$a(x) = a = v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_1}^{0} v \cdot dv = \int_{0}^{x_h} (-g \cdot \sin\alpha - g \cdot \mu \cdot \cos\alpha) \cdot dx$$

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{0} = \left[-g \cdot x \cdot \sin\alpha - g \cdot \mu \cdot x \cdot \cos\alpha\right]_0^{x_h}$$

$$0 - \frac{v_1^2}{2} = -g \cdot x_h \cdot \sin\alpha - g \cdot \mu \cdot x_h \cdot \cos\alpha$$

$$x_h = \frac{v_1^2}{2 \cdot g \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}$$



$$\sin\alpha = \frac{h}{x_h} \quad \Rightarrow \quad h = \sin\alpha \cdot x_h$$

Damit erhält man für die gesuchte Höhe

$$h = \frac{v_f^2 \cdot \sin a}{2 \cdot g \cdot \left(\sin a + m \cdot \cos a\right)}$$

oder mit der Geschwindigkeit

$$h = \frac{\left(\frac{c}{m} \cdot f - 2 \cdot m \cdot g\right) \cdot f \cdot \sin a}{2 \cdot g \cdot \left(\sin a + m \cdot \cos a\right)}$$

Aufgabe 4

a.) <u>Bewegungsgleichungen:</u>

$$m\,\ddot{x} = 0 \qquad\qquad m\,\ddot{z} = G = m\,g$$

<u>Integrationen:</u> (mit unbestimmten Integralen)

$$\dot{x} = C_1 \qquad\qquad \dot{z} = g\,t + C_3$$

$$x = C_1\,t + C_2 \qquad\qquad z = \frac{g\,t^2}{2} + C_3\,t + C_4$$

<u>Anfangsbedingungen:</u>

Gegeben sind 2 Differentialgleichungen 2. Ordnung. Bei der Integration treten damit $2 \times 2 = 4$ Integrationskonstanten auf. Sie folgen aus den 4 Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad\rightarrow\quad C_1 = v_0$$

$$x(0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_2 = 0$$

$$\dot{z}(0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_3 = 0$$

$$z(0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_4 = 0$$

Einsetzen liefert die Lösung in Parameterdarstellung (Parameter t):

$$\dot{x}(t) = v_0 \qquad\qquad \dot{z}(t) = g\,t$$

$$x(t) = v_0\,t \qquad\qquad z(t) = \frac{g\,t^2}{2}$$

$\rightarrow$ Die Bewegung ist unabhängig von der Größe der Masse m.

<u>Randbedingungen beim Passieren des Rings (Zeitpunkt t_R):</u>

$$\dot{x}(t_R) = v \sin a \quad\rightarrow\quad v_0 = v \sin a \qquad (1)$$

$$x(t_R) = a \quad\rightarrow\quad v_0\,t_R = a \qquad (2)$$

$$\dot{z}(t_R) = v \cos a \quad\rightarrow\quad g\,t_R = v \cos a \qquad (3)$$

$$z(t_R) = b \quad\rightarrow\quad \frac{g\,t_R^2}{2} = b \qquad (4)$$

Bestimmung des Abstandes b und der Anfangsgeschwindigkeit v_0:

Durch umformen und einsetzen der Gleichungen (1) – (4) ineinander, folgt

$$b = \frac{a}{2\tan a}$$

und

$$v_0 = \sqrt{g\ a\ \tan a}\ .$$

b.) Bestimmung der Geschwindigkeit v (beim Passieren des Rings):

Gl. (1) umgestellt ist

$$v = \frac{v_0}{\sin a}\ . \qquad (5)$$

Gl. (2) umgeformt nach v_0 und in Gl. (5) eingesetzt, liefert

$$v = \frac{a}{t_R\ \sin a} \qquad (6)$$

und (3) umgeformt nach t_R und eingesetzt in Gl. (6), ist die Lösung

$$v = \sqrt{\frac{g\ a}{\cos a\ \sin a}}\ .$$

Einheiten zur Kontrolle: $\left[\frac{m}{s}\right] = \sqrt{\left[\frac{m\ m}{s^2}\right]}$

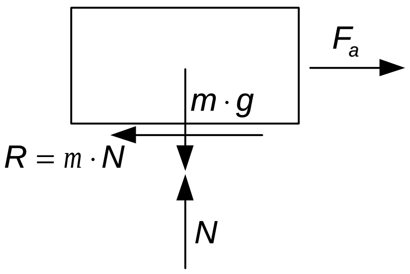
Aufgabe 5

Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 = 0$

Endgeschwindigkeit: $$v = 20\,\frac{m}{\min} = \frac{20m \min}{\min \;\; 60s} = \frac{1}{3}\,\frac{m}{s}$$

$N = m \cdot g$

$\Rightarrow R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$



Impulssatz:

$$m \cdot v - m \cdot v_0 = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt$$

$$11100\ kg \cdot \frac{1}{3}\,\frac{m}{s} - 0 = \int_0^{4\,s} \left(F_a - \mu \cdot m \cdot g\right) \cdot dt$$

$$F_a = \frac{11100\ kg}{4\ s} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{m}{s} + 0{,}02 \cdot 11100\ kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

$$F_a = 3102{,}8\,N \quad \hat{=} \quad 3{,}1 \;\; kN$$

Aufgabe 6

Impulssatz: $m \cdot v - m \cdot v_0 = \int_{t_0}^{t} F \cdot dt$

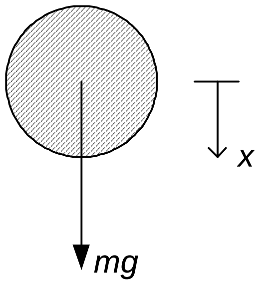
$$v = \frac{1}{m} \cdot \int_0^T F_0 \cdot \sin\left(\frac{p}{T} \cdot t\right) \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot F_0 \cdot \frac{T}{p} \cdot \left[\cos\frac{p}{T} \cdot t\right]_0^T$$

$$= \frac{-F_0}{m} \cdot \frac{T}{p} \cdot (-2)$$

$$v = \frac{114N}{0{,}15kg} \cdot \frac{1}{6}s \cdot \frac{2}{p} = 80{,}64\frac{m}{s}$$

Aufgabe 7



$\downarrow: m \cdot \ddot{x} = m \cdot g$

$a = \ddot{x} = g$

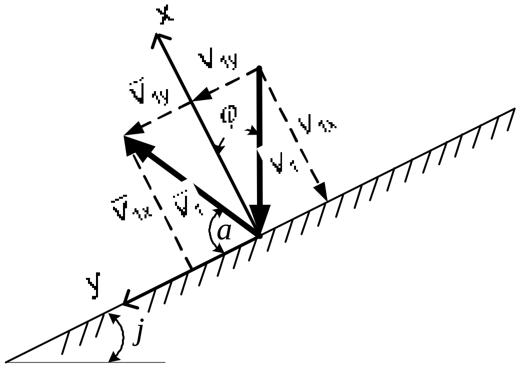
$$a(x) = a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v \cdot dv = a \cdot dx$$

$$\int_{v=0}^{v_1} v \cdot dv = \int_{x=0}^{h} g \cdot dx$$

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{v_1} = [g \cdot x]_0^h$$

$$\frac{v_1^2}{2} = g \cdot h$$

$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ Geschwindigkeit direkt vor dem Aufprall auf die Platte.



$v_{1x} = -v_1 \cdot \cos\varphi$

$v_{1y} = -v_1 \cdot \sin\varphi$

$x \mathrel{\hat{=}}$ Stoßnormale

Da in y-Richtung kein Kraftstoß wirkt (glatte Platte), gilt $\bar{v}_{1y} = v_{1y}$

$$e = -\frac{\bar{v}_{1x}}{v_{1x}} \qquad \Rightarrow \quad \bar{v}_{1x} = -e \cdot v_{1x} = e \cdot v_1 \cdot \cos\varphi$$

$$\bar{v}_{1x} = 0{,}5 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \cos\varphi$$

$$\underline{\bar{v}_{1x} = \sqrt{\frac{g \cdot h}{2}} \cdot \cos\varphi}$$

Für den Winkel α erhält man

$$\tan\alpha = \frac{|\bar{v}_{1x}|}{|\bar{v}_{1y}|} = \frac{e \cdot v_{1x}}{|v_{1y}|} = \frac{e}{\tan\varphi}$$

und mit $e = 0{,}5$ und $\varphi = 30°$ folgt $\underline{\alpha = 40{,}89°}$.

Geschwindigkeit $\bar{v}_1$ nach dem Stoß: $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{v}_{1x}^2 + \bar{v}_{1y}^2} = \sqrt{\frac{7}{8} gh}$

Aufgabe 8

a.) Energiesatz:

$$E_{K0} + E_{P0} = E_{K1} + E_{P1}$$

$$0 + \frac{c\left(f - x\right)^2}{2} = \frac{m\,v_A^2}{2} + 0 \qquad \text{mit } \; x = 0$$

$$v_A = f\sqrt{\frac{c}{m}}$$

b.) Energiesatz:

$$E_{K0} + E_{P0} = E_{K1} + E_{P1}$$

$$\frac{m\,v_A^2}{2} + 0 = 0 + m\;g\;x_0\;\sin a$$

$$x_0 = \frac{v_A^2}{2\;g\;\sin a}$$

Aufgabe 9

a.) Bewegungsgleichungen:

$$m\,\ddot{x} = F_X = F_{Feder} - R$$
$$m\,\ddot{y} = F_y = G - N = 0 \qquad \text{(da in y-Richtung keine Verschiebung)}$$

$$\rightarrow \quad N = G$$

$$F_X = c\,(f - x) - \mu\, m\, g$$

Arbeitssatz:

$$E_{K1} - E_{K0} = W$$

$$\frac{m\,v_1^2}{2} - \frac{m\,v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = W$$

$$\frac{m\,v_A^2}{2} - 0 = \int_{x_0=0}^{x_1=f} (c\,(f-x) - \mu\, m\, g)\,dx = c\, f^2 - \frac{c\, f^2}{2} - \mu\, m\, g\, f$$

$$v_A = \sqrt{\left(\frac{c}{m} f^2 - 2\mu\, g\, f\right)}$$

b.) Bewegungsgleichungen:

$$m\,\ddot{x} = F_X = -G\sin\alpha - R$$
$$m\,\ddot{y} = F_y = G\cos\alpha - N = 0$$

$$\rightarrow \quad N = G\cos\alpha$$

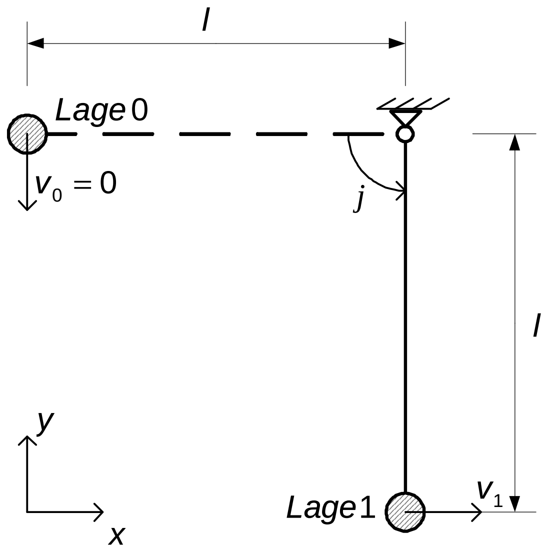
$$F_X = -G\sin\alpha - \mu\, G\cos\alpha$$

Arbeitssatz:

$$0 - \frac{m\,v_A^2}{2} = \int_{x=0}^{x=x_0} F_X\,dx = (-G\sin\alpha - \mu\, G\cos\alpha)$$

$$x_0 = \frac{v_A^2}{2\,g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

Aufgabe 10:



a.) Energiesatz:

$$\underbrace{E_{k1}}_{\substack{\text{kinetische Energie}\\\text{in Lage 1}}} + \underbrace{E_{p1}}_{\substack{\text{potentielle Energie}\\\text{in Lage 1}}} = \underbrace{E_{k0}}_{\substack{\text{kinetische Energie}\\\text{in Lage 0}}} + \underbrace{E_{p0}}_{\substack{\text{potentielle Energie}\\\text{in Lage 0}}}$$

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + m \cdot g \cdot h_0$$

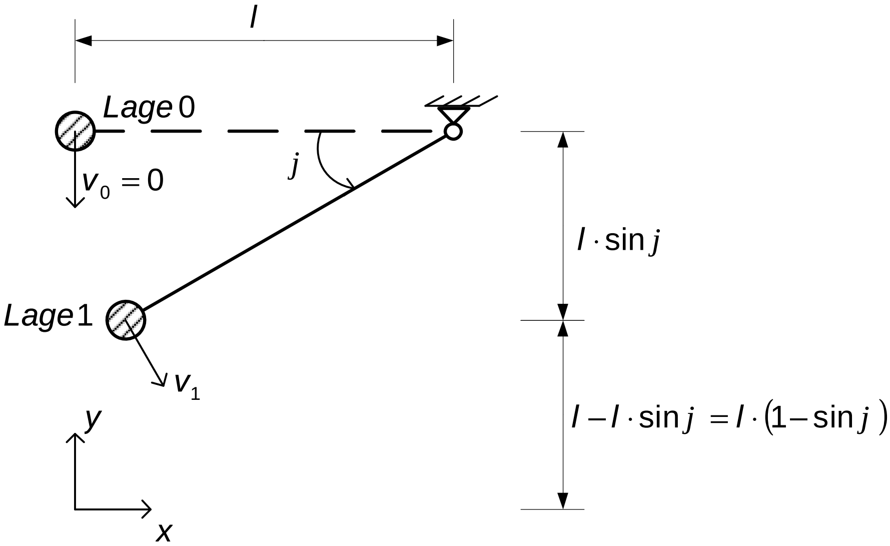
$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot 0 = \frac{m \cdot 0}{2} + m \cdot g \cdot l$$

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = m \cdot g \cdot l$$

$$v_1^2 = 2 \cdot g \cdot l \qquad \Rightarrow \quad v_{max} = v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot l}$$

Merke: Energiesatz nur anwenden, wenn kein Bewegungswiderstand (Reibung) auftritt.

b.)



Energiesatz:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0}$$

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \sin\varphi) = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + m \cdot g \cdot l$$

$$v_1^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi \qquad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi} \qquad (1)$$

Sonderfall Kreisbewegung: $v = r \cdot \omega = r \cdot \dot{\varphi}$

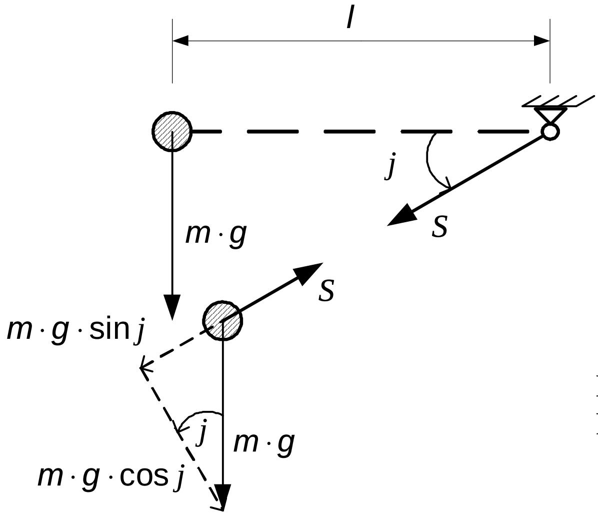
$$v_1 = l \cdot \dot{\varphi}$$

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi} = l \cdot \dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(\varphi) = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \sin\varphi}{l}} \qquad (2)$$

c.)

Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten:

(Sonderfall Kreisbewegung: $|a_r| = \dfrac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 = r \cdot \dot{\varphi}^2$)



Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten:

$$\nearrow: m \cdot a_r = S - m \cdot g \cdot \sin\varphi \qquad (3)$$

$$m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 = S - m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$S = m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot \sin\varphi \qquad (4)$$

- maximale Seilkraft $S_{\max} = \frac{3}{2} \cdot m \cdot g$ und Gl. (2) in Gl. (4) eingesetzt und man erhält

$$\frac{3}{2} \cdot m \cdot g = m \cdot l \cdot \frac{2 \cdot g \cdot \sin j}{l} + m \cdot g \cdot \sin j$$

$$\frac{3}{2} = 2 \cdot \sin j + \sin j$$

$$\sin j = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2+1)} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad j_{\max} = j = 30°$$