Aufgabe. 1

Ein Zug fährt zwischen zwei Großstädten und passiert das Dorf A um 15:30:00 Uhr mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 135$ km/h. Exakt 17,1 km hinter Dorf A erkennt der Lokführer eine Gestalt auf den Gleisen und bremst mit der konstanten Bremsbeschleunigung $a = -1$ m/s^2. Nach einer Distanz von 625 m erkennt er, dass die Gleise wieder frei sind, hört auf zu bremsen und fährt mit der konstanten, reduzierten Geschwindigkeit v_1 weiter, bis er sich vom Schock erholt hat.

a.) Um wieviel Uhr (HH:MM:SS) ereignet sich der plötzliche Bremsvorgang?

b.) Bestimmen Sie die Funktion der Geschwindigkeit $v(x)$ für die Dauer des Bremsmanövers. Wie groß ist die Geschwindigkeit v_1?

c.) Bestimmen Sie die Funktion der Zeit $t(x)$ und die Dauer des Bremsmanövers in Sekunden. Hinweis: Nutzen Sie dazu die Formel zur Bestimmung von $t(x)$ aus $v(x)$.

d.) Stellen Sie das v-x-Diagramm für die Dauer des Bremsvorgangs grafisch dar. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle mit mindestens 7 Werten von x.

Aufgabe. 2

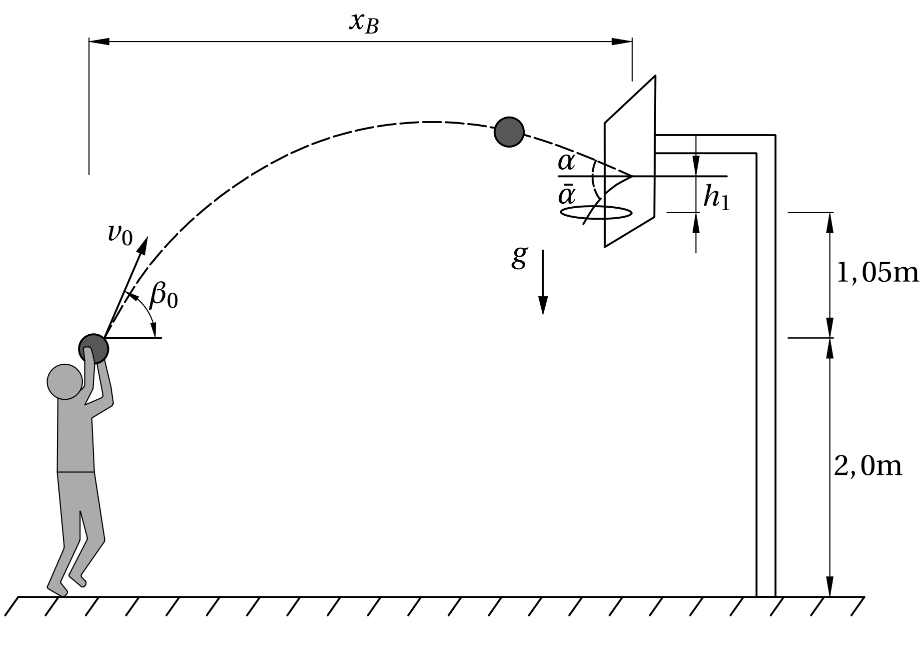
Ein Basketballspieler wirft den Ball mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel von $\beta_0 = 52°$ und trifft das Brett im Abstand von h_1 über dem Korb mit einer Geschwindigkeit von $v_{Brett} = 7,49$ m/s und unter einem Winkel von $\alpha = 42,27°$. Der Ball wird dort zurückgeprallt ($e = 0,8$) und im besten Fall fällt er durch den Korb.

a.) Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0?

b.) Wie viel Zeit benötigt der Ball, um das Brett zu treffen?

c.) Wie groß sind der vertikale Abstand h_1 und der horizontale Abstand x_B?

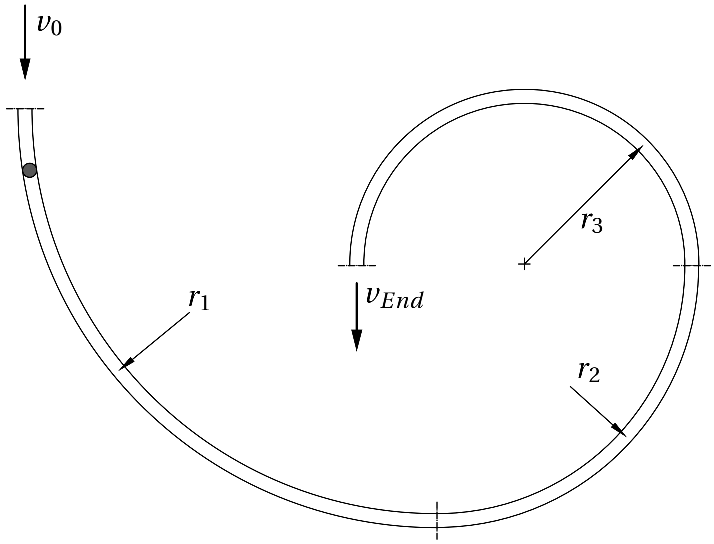
d.) Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit des Balls nach dem Abprall am Brett.



Aufgabe. 3

Dargestellt ist die Draufsicht einer Kugelbahn mit drei Abschnitten mit unterschiedlichen Radien. Die ersten beiden Abschnitte beschreiben jeweils einen Viertelkreis, der dritte einen Halbkreis. Eine Kugel tritt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0,3$ m/s in die Bahn ein. Im ersten Abschnitt I wird sie mit der Beschleunigung $\ddot{\varphi} = -0,15$ rad/s^2 gebremst, und in den Abschnitten II und III wird sie nicht gebremst. Das Verhältnis zwischen den Radien ist:

$$r_1 = 1,6 \cdot r_2 = 2,4 \cdot r_3$$



a.) Berechnen Sie die Radien r_1, r_2, r_3 für den Fall, dass die Gesamtstrecke zwischen dem Eintritt und dem Austritt der Kugel $s_{ges} = 92,64$ cm beträgt.

b.) Bestimmen Sie die Funktionen der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ für alle drei Abschnitte. Berechnen Sie ebenfalls, welche Zeit t_1^*, t_2^*, t_3^* die Kugel braucht, um jeden Abschnitt zu durchrollen, sowie die Gesamtzeit t_{Ges}^*.

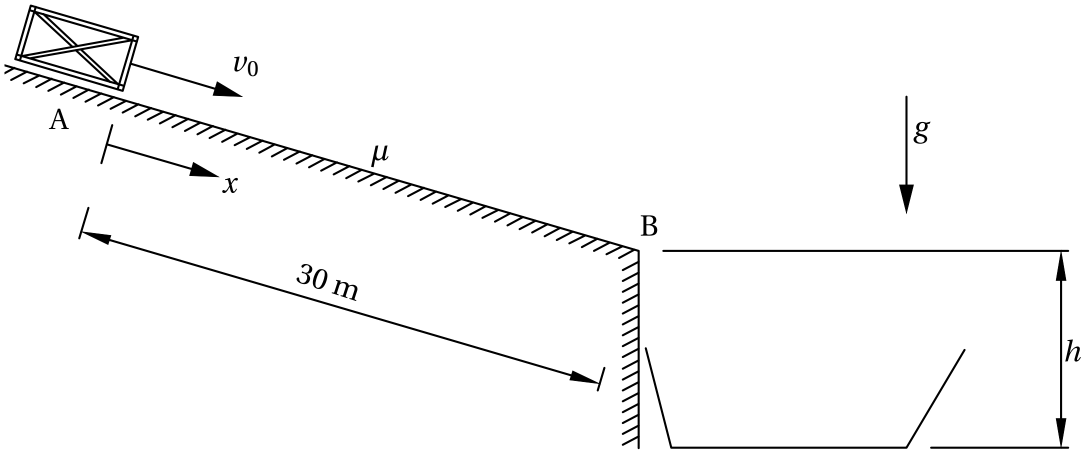
c.) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_{End} der Kugel bei ihrem Austritt aus der Bahn?

d.) Stellen Sie das ω-t-Diagramm für den betrachteten Zeitraum grafisch dar.

Hinweis: Falls Sie.für einen Aufgabenteil die Lösung des vorigen Aufgabenteils benötigen und diese nicht ermitteln konnten, nehmen Sie zur weiteren Bearbeitung hierfür einen sinnvollen Wert an!

Aufgabe. 4

Eine Kiste der Masse m rutscht mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine um $\alpha = 16°$ geneigte Ebene hinunter ($\mu = 0,35$).



a.) Berechnen Sie mithilfe des Arbeitssatzes die benötigte Anfangsgeschwindigkeit, damit die Kiste gerade noch am Ende der schiefen Ebene (Punkt B) zum Stillstand kommt.

b.) Berechnen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15$ m/s die Fallhöhe h, wenn die Kiste den Boden des Containers mit der Endgeschwindigkeit $v_{Cont} = 15$ m/s erreicht. Nutzen Sie dazu den Arbeitssatz und den Energiesatz.

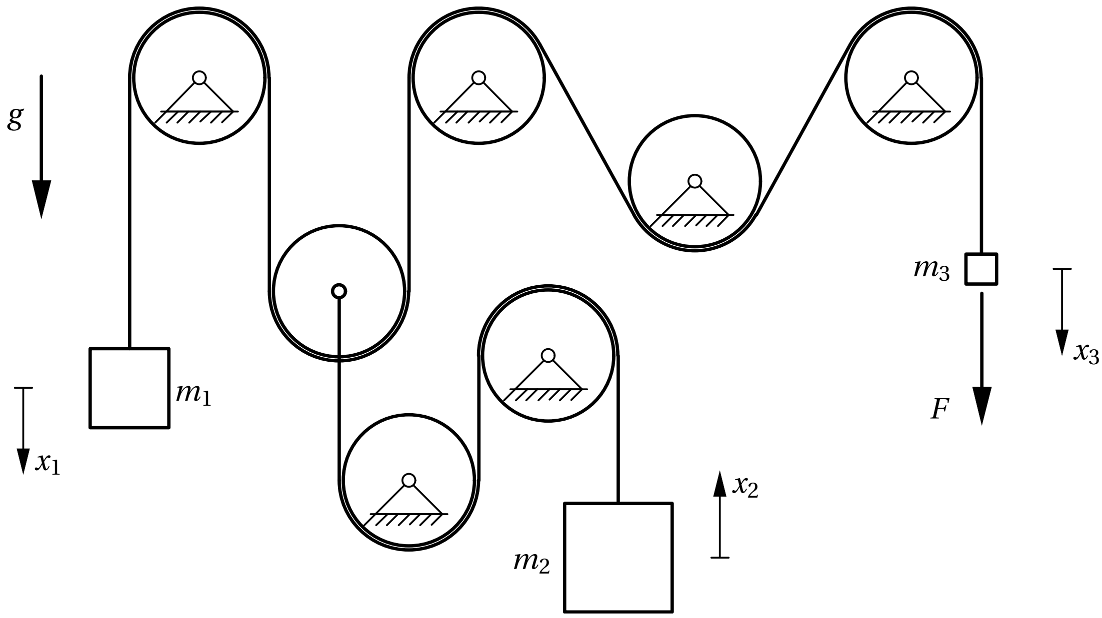
Aufgabe. 5

Die drei dargestellten Massenpunkte $m_1 = 8$ kg , $m_2 = 20$ kg und $m_3 = 1$ kg werden durch eine Kraft F, die an der Masse m_3 wirkt, reibungsfrei in Bewegung versetzt. Die Massen der Rollen und der Seile können vernachlässigt werden. Die Seile seien dehnstarr.

a.) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für alle drei Massen in Abhängigkeit der Kraft F an und bestimmen Sie die entsprechende kinematische Beziehung.

b.) Wie groß sind die Seilkräfte für den Fall, dass $F = 120$ N ist? Berechnen Sie für die Masse m_2 die Zeit, die benötigt wird, um sie 2 m anzuheben. Welche Geschwindigkeit besitzt sie zu diesem Zeitpunkt?

c.) Wie groß muss F sein, damit sich das System im Ruhezustand befindet? Wie groß sind dann die Seilkräfte?



Aufg. 1

a)

$$Dorf\,A \rightarrow 15:30:00$$
$$Bremsvorgang\ nach\ 17{,}2\,km\ bei\ 37{,}5\,m/s$$
$$(v_0 = 135 km/h \hat{=} 135\frac{km}{h}\cdot 1000\frac{m}{km}\cdot\frac{1}{60^2}\frac{h}{s} = 37{,}5\,m/s)$$
$$t = \frac{x}{v} = \frac{17100\,m}{37{,}5\frac{m}{s}} = 456\,s \hat{=} 7\,\text{min}, 36\,s$$
$$Uhrzeit: 15:37:36$$

b)

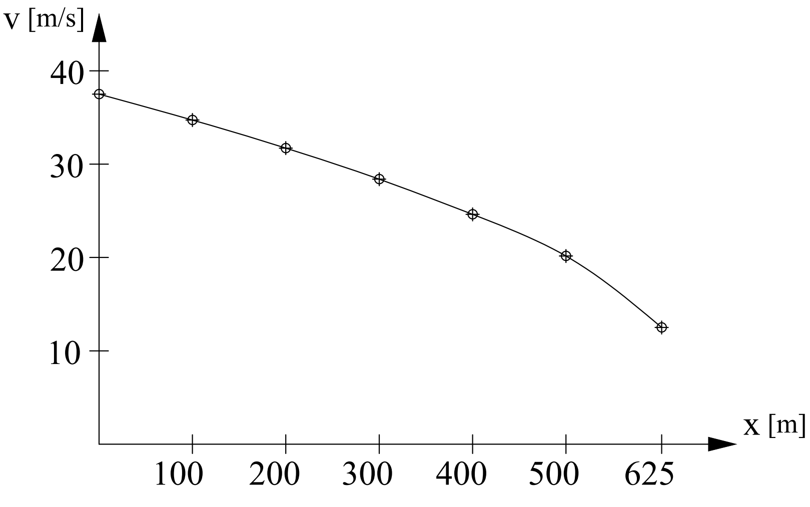
$$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2\cdot\int_0^x a(\bar{x})\,d\bar{x}} \Leftrightarrow \sqrt{37{,}5^2 + 2\cdot(-1)\cdot x}$$
$$v(x) = \sqrt{1406{,}25 - 2\cdot x}$$

c)

$$t(x) = t_0 + \int_0^x \frac{1}{v(\bar{x})}d\bar{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1406{,}25 - 2\bar{x}}}d\bar{x}$$
$$= \int_0^x (1406{,}25 - 2\bar{x})^{-\frac{1}{2}}d\bar{x} = \left[\frac{1}{0{,}5}\cdot\left(\frac{1}{-2}\right)\cdot(1406{,}25 - 2\cdot\bar{x})^{\frac{1}{2}}\right]_0^x$$
$$= -\left[\sqrt{1406{,}25 - 2\cdot x} - \sqrt{1406{,}25}\right] = 37{,}5 - \sqrt{1406{,}25 - 2x}$$

$$t(x = 625m) = 25s$$

d)



x[m]	v[m/s]
0	37,50
100	34,73
200	31,72
300	28,39
400	24,52
500	20,16
625	12,50

Aufg. 2

a)

$$m \cdot \ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \qquad m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g \Rightarrow \ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = v_0 \cdot \cos\beta_0 \qquad \dot{y} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\beta_0$$

$$x = v_0 \cdot \cos\beta_0 \cdot t \qquad y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin\beta_0 \cdot t$$

$$\dot{x}(t = t^*) = v_0 \cdot \cos\beta_0 = v_{Brett} \cdot \cos\alpha \Rightarrow v_0 = \frac{v_{Brett} \cdot \cos\alpha}{\cos\beta_0} = 9,00\,\frac{m}{s^2}$$

b)

$$\dot{y} = (t = t^*) - g \cdot t^* + v_0 \cdot \sin\beta_0 = -v_{Brett} \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{v_{Brett} \cdot \sin\alpha + v_0 \cdot \sin\beta_0}{g} = \frac{7,49 \cdot \sin(42,27°) + 9 \cdot \sin(52°)}{9,81} = \underline{\underline{1,236\,s}}$$

c)

$$x(t = t^*) = v_0 \cdot \cos\beta_0 \cdot t^* = 9 \cdot \cos(52°) \cdot 1,236 = 6,85\,m$$

$$y(t = t^*) = -g\frac{(t^*)^2}{2} + v_0 \cdot \sin\beta_0 \cdot t^* = 3,05 - 2,00 + h_1$$

$$h_1 = -9,81 \cdot \frac{1,236^2}{2} + 9 \cdot \sin(52°) \cdot 1,236 - 1,05 = 0,222\,m$$

d)

$$\bar{v}_{1,y} = v_{1,y} = -v_{Brett} \cdot \sin\alpha = -5,038\,\frac{m}{s}$$

$$\bar{v}_{1,x} = -e \cdot v_{1,x} = -0,8 \cdot v_{Brett} \cdot \cos\alpha = -4,43\,\frac{m}{s}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\bar{v}_{1,y}^2 + \bar{v}_{1,x}^2} = 6,71\,\frac{m}{s}$$

$$\tan(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{v}_{1,y}}{\bar{v}_{1,x}} \Rightarrow \bar{\alpha} = 48,67°$$

Aufg. 3

a)

$$S_{Ges} = 92,64m = S_1 + S_2 + S_3 = r_1 \cdot \varphi_1 + r_2 \cdot \varphi_2 + r_3 \cdot \varphi_3$$

$$92,64m = r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{r_1}{1,6} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{r_1}{2,4} \cdot \pi = 3,86 \cdot r_1$$

$$\Rightarrow r_1 = 24\,cm \mathrel{\hat{=}} 0,24\,m$$

$$r_2 = \frac{r_1}{1,6} = 15\,cm \mathrel{\hat{=}} 0,15\,m$$

$$r_3 = \frac{r_1}{2,4} = 10\,cm \mathrel{\hat{=}} 0,10\,m$$

b)

Abschnitt I:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r_1} = \frac{0{,}3\,m/s}{0{,}24\,m} = 1{,}25\frac{rad}{s}$$

$$\omega(t) = 1{,}25 - 0{,}15 \cdot t$$

$$\varphi(t) = 1{,}25 \cdot t - 0{,}15 \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi(t = t_1^*) = 1{,}25 \cdot t_1^* - 0{,}15 \cdot \frac{(t_1^*)^2}{2} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (t_1^*)^2 - 16{,}\bar{6} \cdot t_1^* + 20{,}944 = 0 \Leftrightarrow t_1^* = \frac{16{,}\bar{6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{16{,}\bar{6}}{2}\right)^2 - 20{,}944} = 1{,}369\,s$$

$$\omega(t = 1{,}369\,s) = 1{,}25 - 0{,}15 \cdot 1{,}369 = 1{,}045\frac{rad}{s}$$

Abschnitt II:

$$\omega_{0,II} = \omega_I \cdot \frac{r_I}{r_{II}} = 1{,}672\frac{rad}{s} \text{ (konstant)}$$

$$\varphi(t) = 1{,}672 \cdot t$$

$$\varphi(t = t_2^*) = 1{,}672 \cdot t_2^* \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_2^* = 0{,}939\,s$$

Abschnitt III:

$$\omega_{0,III} = \omega_{II} \cdot \frac{r_{II}}{r_{III}} = 2{,}508\frac{rad}{s} \text{ (konstant)}$$

$$\varphi(t) = 2{,}508 \cdot t$$

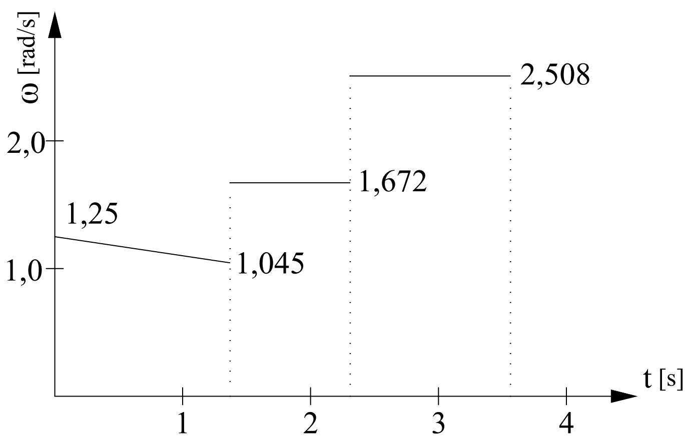
$$\varphi(t = t_3^*) = 2{,}508 \cdot t_3^* = \pi \Leftrightarrow t_3^* = 1{,}253\,s$$

$$t_{Ges}^* = t_1^* + t_2^* + t_3^* = 1{,}369 + 0{,}939 + 1{,}253 = 3{,}561\,s$$

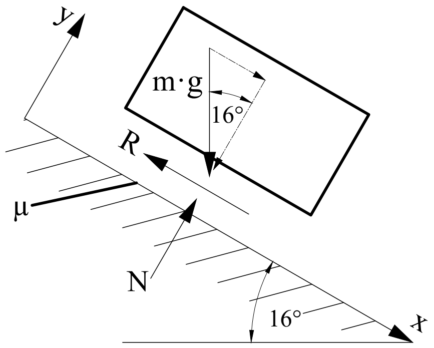
c)

$$v_{End} = \omega_{III} \cdot r_{III} = 2{,}508\frac{rad}{s} \cdot 0{,}1\,m = 0{,}2508\frac{m}{s}$$

d)



Aufg. 4



$$\nearrow: \; m \cdot \ddot{y} = N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \;\rightarrow\; N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$
$$\searrow: \; m \cdot \ddot{x} = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \underbrace{R}_{\mu \cdot N} \;\rightarrow\; m \cdot \ddot{x} = m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

a) Arbeitssatz: $E_{k1} - E_{k0} = W$

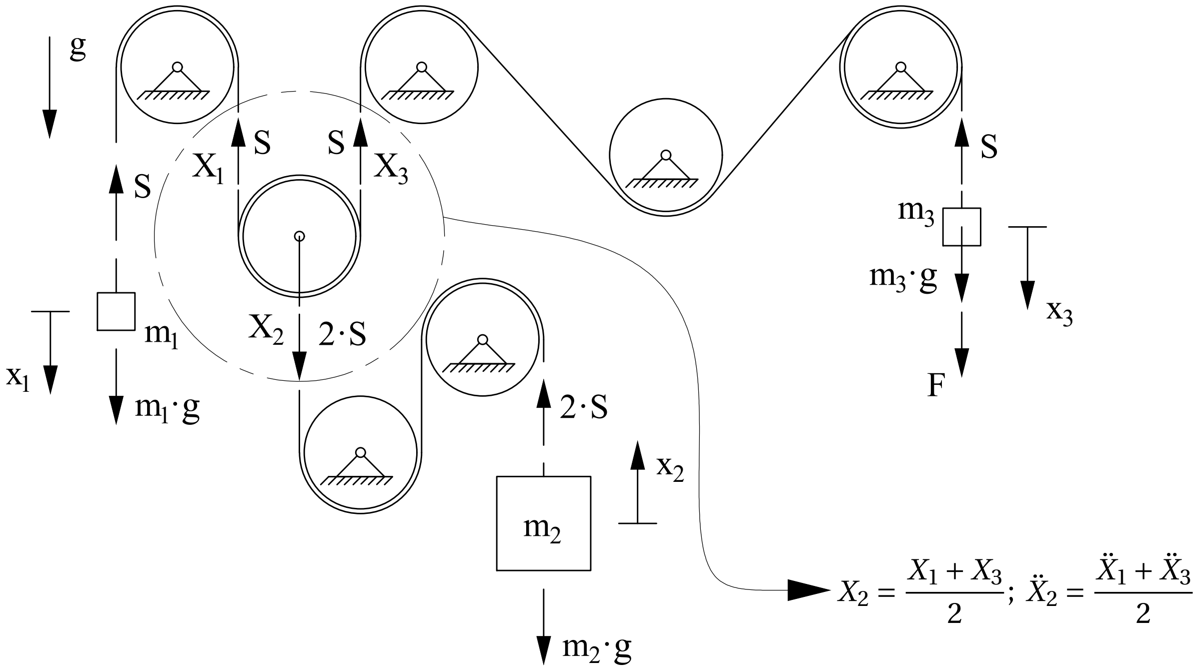
$$v_{End} = 0$$
$$\Rightarrow 0 - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \int_0^{30} m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)\, dx$$
$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{-2 \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot 30} = 5{,}982 \frac{m}{s}$$

b)

$$v_0 = 15 \frac{m}{s}$$
$$\Rightarrow \frac{m \cdot v_b^2}{2} - \frac{m \cdot 15^2}{2} = m \cdot \overbrace{g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}^{-0{,}5965} \cdot 30$$
$$\Leftrightarrow v_b = \sqrt{-0{,}5965 \cdot 30 \cdot 2 + 225} = 13{,}755 \frac{m}{s}$$

$$\text{Energiesatz:}\; m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v_b^2}{2} = m \cdot g \cdot 0 + \frac{m \cdot v_{Cont}^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_{Cont}^2 - v_b^2\right) = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(15^2 - 13{,}755^2\right) = 1{,}825\, m$$

Aufg. 5



$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = m_1 \cdot g - S \qquad m_2 \cdot \ddot{x}_2 = 2 \cdot S - m_2 \cdot g \qquad m_3 \cdot \ddot{x}_3 = m_3 \cdot g + F - S$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 = g - \frac{S}{m_1} = g - \frac{S}{8} \qquad \Leftrightarrow \ddot{x}_2 = \frac{2 \cdot S}{m_2} - g = \frac{S}{10} - g \qquad \Leftrightarrow \ddot{x}_3 = g + \frac{F - S}{m_3} = g + F - S$$

a)

$$\Rightarrow 2 \cdot \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_3$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot S}{m_2} - g \right) = g - \frac{S}{m_1} + g + \frac{F - S}{m_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot S}{20} - 2 \cdot g = 2 \cdot g - \frac{S}{8} + \frac{F - S}{1}$$

$$\Leftrightarrow S \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + 1 \right)}_{\frac{53}{40} = 1{,}325} = 4 \cdot g + F$$

$$\Rightarrow S = \frac{40}{53} \cdot (4 \cdot g + F)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = g - \frac{\frac{40}{53} \cdot (4 \cdot g + F)}{8} = \frac{33}{53} g - \frac{5}{53} F$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{\frac{40}{53} \cdot (4 \cdot g + F)}{10} - g = -\frac{37}{53} g - \frac{4}{53} F$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_3 = g + F - \frac{40}{53} \cdot (4 \cdot g + F) = -\frac{107}{53} g + \frac{13}{53} F$$

b) F=120 N

$$S = \frac{40}{53} \cdot \left(4 \cdot g + 120N\right) = \frac{40}{53}\,(4 \cdot 9,81 + 120N) = 120,18N$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_2 = \frac{S}{10} - g \\
\Leftrightarrow\ &\ddot{x}_2 = \frac{120,18N}{10kg} - 9,81 = 2,208\frac{m}{s^2} \\
&\dot{x}_2 = 2,208 \cdot t \\
&x_2 = \frac{2,208}{2} \cdot t^2
\end{aligned}$$

$$x_2(t = t^*) = 2m \rightarrow 2m = \frac{2,208}{2} \cdot \left(t^*\right)^2 \Leftrightarrow t^* = \sqrt{\frac{4}{2,208}} = 1,346s$$

$$\dot{x}_2(t = t^*) = 2,208 \cdot 1,346 = 2,97\frac{m}{s}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot S}{m_2} - g\right) = g - \frac{S}{m_1} + g + \frac{F - S}{m_3} \overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot S}{20} - g\right) = 0 \Rightarrow S = 10 \cdot g = 98,1\,N \\
&\Rightarrow g - \frac{S}{8} + g + \frac{F - S}{1} = 0 \Rightarrow g \cdot \left(1 - \frac{10}{8} + 1 - \frac{10}{1}\right) = -F \\
&\Rightarrow F = 9,25 \cdot g = \underline{\underline{90,74\,N}}
\end{aligned}$$