Aufgabe. 1

Ein Ball wird von einer 130 m hohen Brücke fallengelassen. Eine Sekunde später wird ein zweiter Ball mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 Richtung Erdboden geschleudert, so dass beide Bälle zur gleichen Zeit aufkommen. Der Luftwiderstand kann näherungsweise vernachlässigt werden. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9,1 \text{ m/s}^2$.

a.) Berechnen Sie die vertikale Abwurfgeschwindigkeit des zweiten Balls und geben Sie die Funktion des zurückgelegten Weges in Abhängigkeit der Zeit $x(t)$ für beide Bälle an.

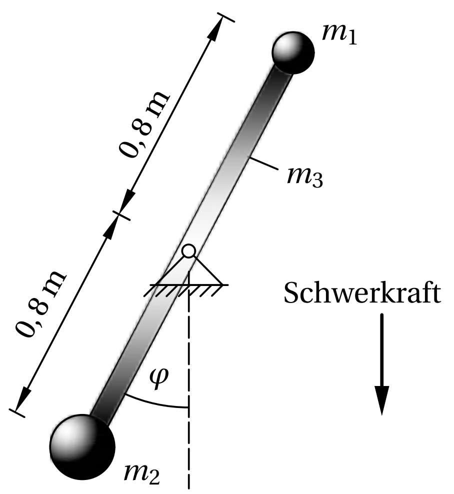
b.) Wie hoch ist die Auftreffgeschwindigkeit der beiden Bälle auf den Boden?

Aufgabe. 2

Im unten dargestellten Pendel sind zwei Punktmassen über einen homogenen dünnen Stab der Masse m_3 miteinander verbunden.

a.) Stellen Sie für das Pendel mithilfe des Momentensatzes die linearisierte Bewegungsgleichung auf.

b.) Das Pendel wird nun ausgelenkt und vollführt Schwingungen mit kleinem Winkel φ. Skizzieren Sie qualitativ (ohne Berechnung von Werten) den Verlauf der kinetischen und der potentiellen Energie des Pendels in Abhängigkeit des Winkels φ.

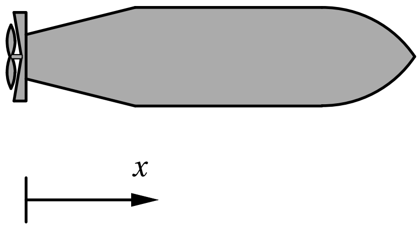


Gegeben:

$m_1 = 1$ kg
$m_2 = 5$ kg
$m_3 = 2$ kg
$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aufgabe. 3

Ein Torpedo der Masse m wird aus dem Stillstand durch einen Propeller mit der Schubkraft F angetrieben. Während einer Fahrt durch das Wasser erfährt er eine Strömungswiderstandskraft die durch die Gleichung $W = k \cdot v^2$ mit dem Strömungswiderstand k beschrieben werden kann.



Gegeben:
$m_1 = 250$ kg
$F = 1000$ N
$k = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

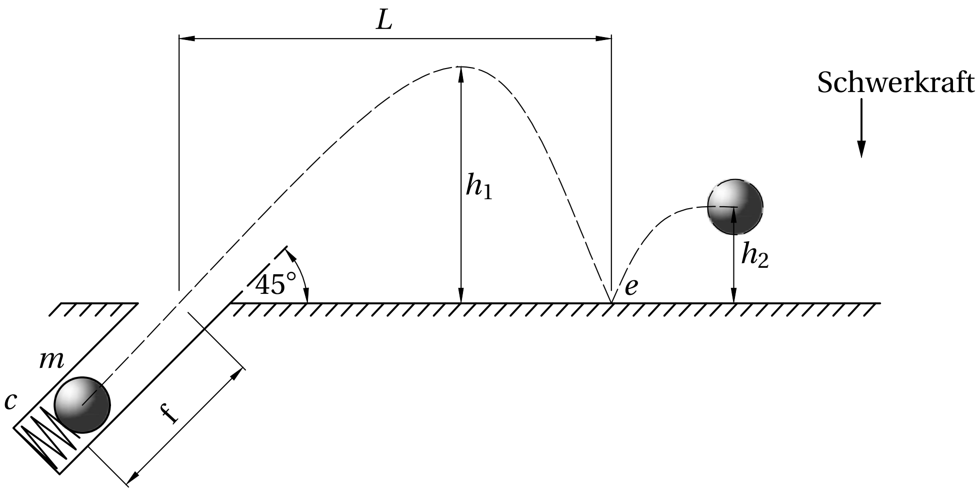
a.) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit, die der Torpedo erreichen kann.

b.) Berechnen Sie den Weg den der Torpedo zur Erreichung von 90 % einer maximalen Geschwindigkeit zurücklegen muss.

Hinweis: $\int \frac{x}{a+bx^2} dx = \frac{\log(a+bx^2)}{2b}$

Aufgabe. 4

Eine Kugel mit der Masse m befindet sich in einem um 45° geneigten Hohlraum auf einer Feder mit der Federzahl c, welche um den Federweg f zusammengedrückt wird. Nachdem die Kugel losgelassen wird, wird sie durch die expandierende Feder herausgeschleudert und trifft nach einer Weile mit dem Abstand L auf dem glatten Boden auf und prallt davon ab. Der Stoß zwischen Boden und Kugel erfolgt teilelastisch mit der Stoßzahl e.



Gegeben:

$m = 2$ kg
f $= 0,5$ m
$c = 3000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
$g = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$e = 0,5$

a.) Berechnen Sie mithilfe des Energiesatzes die Geschwindigkeit der Kugel beim Verlasen des Hohlraum und die maximale Höhe h_1, die die Kugel erreicht.

b.) Berechnen Sie den Abstand L, bei dem die Kugel das erste Mal auf dem Boden aufprallt.

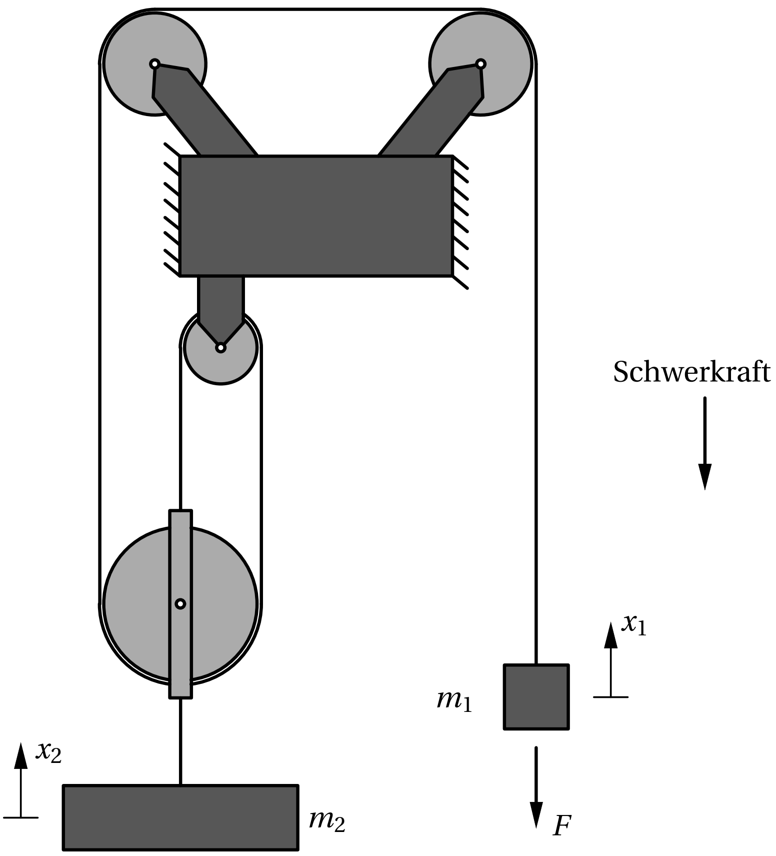
c.) Berechnen Sie die Geschwindigkeitskomponenten direkt nach dem Aufprall (Stoß) und die Höhe h_2, die die Kugel nach dem Aufprall nun erreicht.

Aufgabe. 5

Die unten dargestellte Masse m_2 soll mithilfe des dargestellten Flaschenzugs mit einer Beschleunigung von $x_2 = 5\ \mathrm{m/s^2}$ angehoben werden. Alle Rollen können als masselos betrachtet werden.

a.) Berechnen Sie die dazu notwendige Beschleunigung der Masse m_1.

b.) Berechnen Sie die dazu notwendige Kraft F.



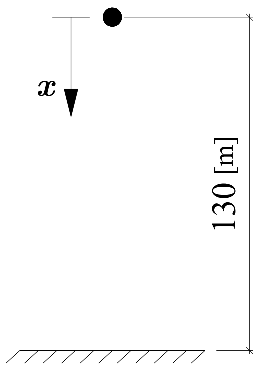
Gegeben:

$m_1 = 25$ kg
$m_2 = 250$ kg

$g = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{2^2}$

Aufg. 1

a) Formel allgemein (für diese Aufgabe):



$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Ball 1:

$$130 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 130}{9,81}} = 5,148\,s$$

Ball 2:

$$t_{Ball_2} = 5,148 - 1 = 4,148\,s$$

$$130 = 0 + v_0 \cdot t_{Ball_2} + \frac{1}{2} g t_{Ball_2}^2 \rightarrow v_0 = \frac{130 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4,148^2}{4,148} = 10,99\,\frac{m}{s}$$

b)

Ball 1:

$$v(t) = g \cdot t_{Ball_1} = 9,81 \cdot 5,148 = 50,50\,\frac{m}{s}$$

Ball 2:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t_{Ball_2} = 10,99 + 9,81 \cdot 4,148 = 51,68\,\frac{m}{s}$$

Aufg. 2

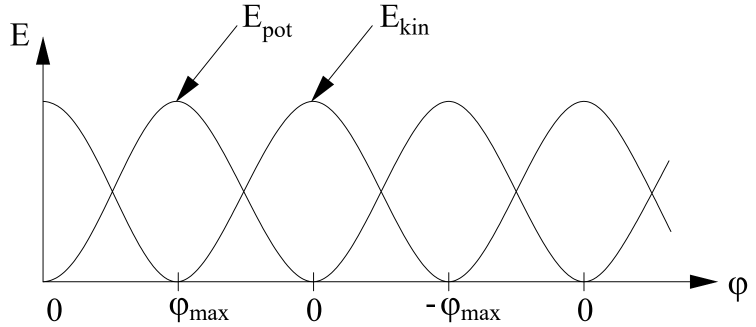
a)

$$\Theta_{ges} \cdot \ddot{\varphi} = -m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot l + m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot l$$
$$\Leftrightarrow \Theta_{ges} \cdot \ddot{\varphi} = -5 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot \sin(\varphi) + 1 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot \sin(\varphi) = -31,39\,\varphi$$

$$\text{mit } \Theta_{ges} = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$$
$$= m_1 \cdot l^2 + m_2 \cdot l^2 + \frac{m_3 \cdot l^2}{12} = 1 \cdot 0,8^2 + 5 \cdot 0,8^2 + \frac{2 \cdot 1,6^2}{12} = 4,27\,kg \cdot m^2$$

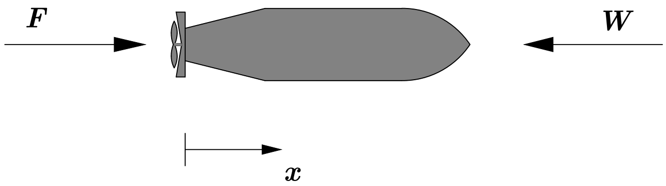
$$\rightarrow 4,27 \cdot \ddot{\varphi} + 31,39 \cdot \varphi = 0$$

b)



Aufg. 3

a)



$$m \cdot \ddot{x} = F - k \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m} - \frac{k \cdot v^2}{m}$$

$$\ddot{x} = \frac{1000\,N}{250\,kg} - \frac{0,1\frac{kg}{m} \cdot v^2}{250\,kg} = 4 - 0,0004 \cdot v^2 \mathrel{\hat{=}} a(v)$$

$$\rightarrow v(t) \rightarrow \max, \text{wenn}\, a(x) = 0$$

$$m \cdot 0 = F - k \cdot v^2 \rightarrow 0 = F - k \cdot v_{\max}^2 \rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{F}{k}} = \sqrt{\frac{1000}{0,1}} = 100\frac{m}{s}$$

b)

$$x(v) = x\left(90\frac{m}{s}\right) = x_0 + \int \frac{v}{a(v)} dv$$

$$= \int \frac{v}{\frac{F}{m} - \frac{k}{m} \cdot v^2} dv = \int_0^{90} \frac{v}{4 - 0,0004 \cdot v^2} dv$$

$$= \left[\frac{-\ln\left(4 - 0,0004 \cdot v^2\right)}{2 \cdot 0,0004}\right]_0^{90} = 343,046 - (-1732,868) = 2075,914\,m$$

Aufg. 4

a)

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{c \cdot x^2}{m}} = \sqrt{\frac{3000 \cdot 0,5^2}{2}} = 19,365\,\frac{m}{s}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0}$$

$$\Leftrightarrow 0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\sin(45°) \cdot v\right)^2 + 0 \rightarrow h = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (\sin(45°) \cdot v)^2}{m \cdot g} = 9,55\,m$$

b)

$\rightarrow: m \cdot \ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$

$\int : \dot{x} = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cdot \cos(45°)$

$\int : x = C_1 \cdot t + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow \dot{x} = v_0 \cdot \cos(45°)$

$\Rightarrow x = v_0 \cdot \cos(45°) \cdot t$

$\uparrow: m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g \rightarrow \ddot{y} = -g$

$\int : \dot{y} = -g \cdot t + C_3 \rightarrow C_3 = v_0 \cdot \sin(45°)$

$\int : y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4 \rightarrow C_4 = 0$

$\Rightarrow \dot{y} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(45°)$

$\Rightarrow y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin(45°) \cdot t$

$y(t_{Aufprall}) = 0 \Rightarrow -g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin(45°) \cdot t = 0 \rightarrow t_1 = 0;\ t_{Aufprall} = 2{,}791\, s$

$x(t = t_{Aufprall}) = v_0 \cdot \cos(45°) \cdot 2{,}791 = 38{,}22\, m$

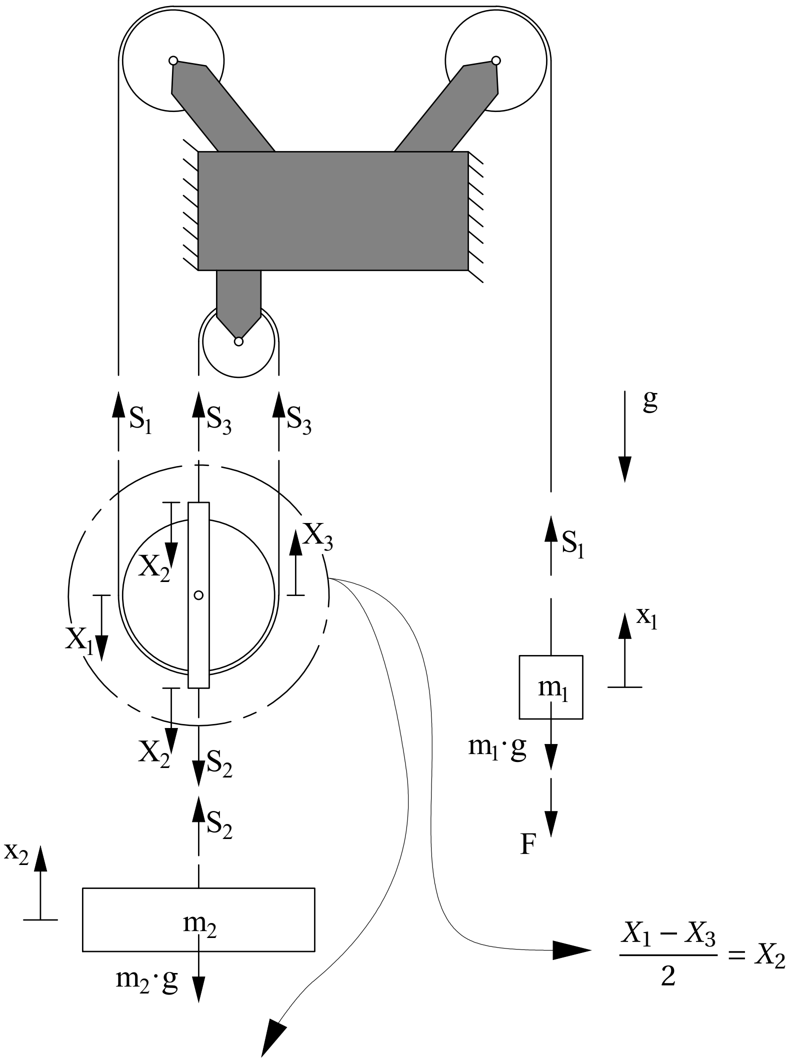
c)

$\overline{\dot{x}} = \dot{x} = v_0 \cdot \cos(45°) = 13{,}69\, \frac{m}{s}$

$\overline{\dot{y}} = \dot{y} \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \cdot \sin(45°) \cdot 19{,}365 = 6{,}846\, \frac{m}{s}$

$m \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\overline{\dot{y}}\right)^2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\overline{\dot{y}}\right)^2}{m \cdot g} = \frac{0{,}5 \cdot 6{,}846^2}{9{,}81} = 2{,}389\, m$

Aufg. 5



$\uparrow: S_1 + S_3 + S_3 - S_2 = 0 \rightarrow S_1 + 2 \cdot S_3 - S_2 = 0$

$S_1 = S_2 - 2 \cdot S_3$

mit $S_1 = S_3$ (Moment)

$\rightarrow S_1 = \frac{S_2}{3}$

a)

da $X_2 = X_3$ gilt, folgt:

$$\frac{X_1 - X_2}{2} = X_2 \Leftrightarrow X_1 = 3 \cdot X_2 \Rightarrow \ddot{X}_1 = 3 \cdot \ddot{X}_2 = 3 \cdot 5 = 15 \frac{m}{s^2}$$

b)

$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -m_2 \cdot g + S_2 \rightarrow S_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2 + m_2 \cdot g$

$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = S_1 - m_1 \cdot g - F$

da $S_1 = \frac{S_2}{3} \rightarrow m_1 \cdot \ddot{x}_1 = \frac{S_2}{3} - m_1 \cdot g - F$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F &= -m_1 \cdot \ddot{x}_1 - m_1 \cdot g + \frac{S_2}{3} \\
&= -m_1 \cdot \ddot{x}_1 - m_1 \cdot g + \frac{m_2 \cdot \ddot{x}_2 + m_2 \cdot g}{3} \\
&= -25\,kg \cdot 15 \frac{m}{s^2} - 25\,kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} - + \frac{250\,kg \cdot 5 \frac{m}{s^2} + 250\,kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{3} = 613,93\,N
\end{aligned}$$