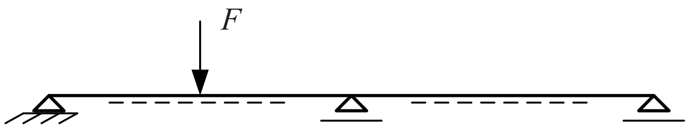
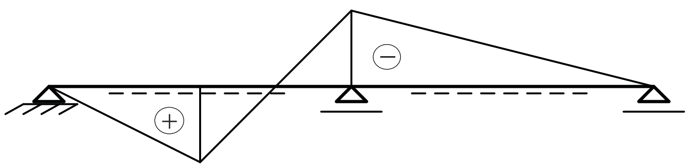
7. EINFLUSSLINIEN EINFLUSSLINIEN (EL)

7.1 Ortsvariable Last (Wanderlast)

Bisher behandelt:
Ermittlung der Zustandsgrößen eines Systems unter der Einwirkung einer **ortsfesten** Last →Ergebnis: Zustandslinien und Verformungsgrößen!
Ortsfeste Lasten:
Ständige Lasten (Einwirkungen) oder veränderliche Einwirkungen mit bekannten Wirkungsorten bzw. –bereichen.
Bei einer Zustandslinie ist die Laststellung fest, dargestellt ist die statische Größe in jedem Systempunkt.
Beispiel:

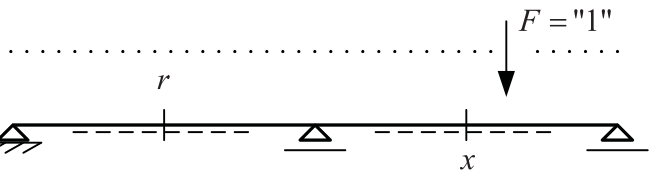


System und ortsfeste Last

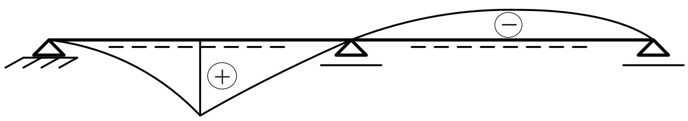


M - Linie

Häufig werden nur die Extremwerte (Maximal- und Minimalwerte) einer Zustandslinie gesucht, die für die Bemessung im Massivbau, Stahlbau oder Holzbau wichtig sind.
In der Praxis kann aber eine Last auch ortsveränderlich sein. Beispiel dafür ist der Schwerlastwagen SLW (alte Bezeichnung) bzw. die Achslasten/Tandemlasten TS (nach neuem DIN-Fachbericht) im Brückenbau oder eine Last auf Kranbahnen. Gesucht ist der maximale Wert **genau einer** Zustandsgröße in **genau einem** bestimmten Punkt in Abhängigkeit von der Laststellung einer **ortsvariablen Last** (Wanderlast). Dies kann mit Hilfe von Einflusslinien erfolgen.



Frage: Wie groß ist z.B. das Biegemoment M (oder V, N, u, w, φ) an der Stelle r unter einer ortsvariablen Wanderlast F=1?
hier: x – Lastpunkt (variabel)
r – Aufpunkt (fest)
Ergebnis:



η_r=Einflusslinie für M_r

Bei einer Einflusslinie ist die Laststellung variabel, dargestellt ist die Zustandsgröße in einem festen Punkt.

Einflusslinien dienen der Ermittlung der
- günstigsten / ungünstigsten Laststellung bzw. Optimierung
- Extremalwerte der Zustandsgrößen M, V(Q), N, u, w, φ

7.2 Definition der Einflusslinien

Eine Einflusslinie (EL) für eine Zustandsgröße im Punkt r gibt an, welchen Wert diese Größe in diesem Punkt annimmt, wenn eine Wanderlast F=1 an der Stelle x wirkt.

Bemerkung:
Beim Ortswechsel der Last wird ein quasistatischer Wechsel angenommen. Dynamische Effekte werden vernachlässigt.

Beispiel:
Eine Momenteneinflusslinie für das Moment im Punkt r gibt das in einem festgelegten Punkt r von einer Wanderlast F=1 hervorgerufene Moment M_r an. M_r wird in dem Punkt angetragen, in dem die Wanderlast steht. Die Einflussordinate an der Stelle x, d.h. $\eta_{(x)}$, ist demnach das Moment im Punkt r, das von der Wanderlast F=1 an der Stelle x erzeugt wird.

Unterteilung:
- Einflusslinien für Kraftgrößen;
- Einflusslinien für Verformungsgrößen (Weggrößen)

Zur Bestimmung der Einflusslinien können prinzipiell alle bereits erlernten Methoden für die Ermittlung einer Zustandslinie verwendet werden.

7.3 Einflusslinien für Kraftgrößen

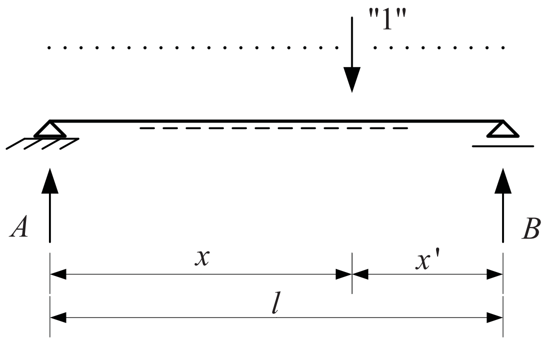
Kraftgrößen:
- Auflagerkräfte
- Querkräfte
- Momente
- Normalkräfte
- Federkräfte und Federmomente

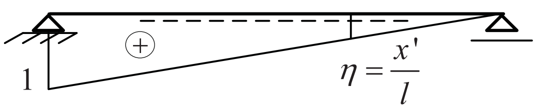
7.3.1 Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen

Häufig werden 2 Methoden verwendet
- Analytische Methode (Schnittprinzip)
- Kinematische Methode (Satz von Land)

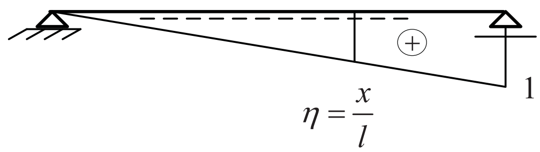
7.3.1.1 Analytische Methode

<u>EL für Auflagerkräfte A und B:</u>



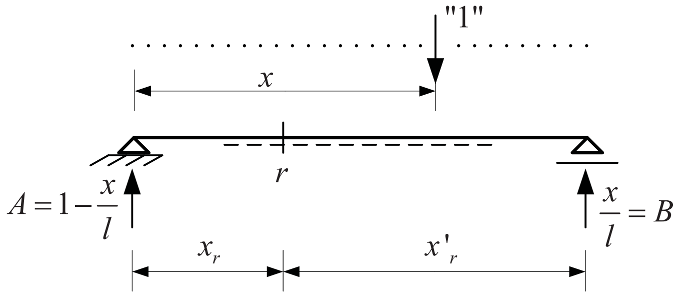


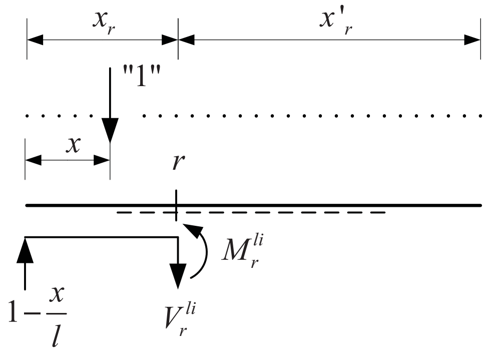
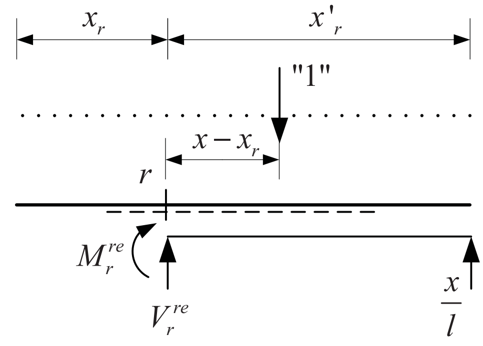
η_A – Linie

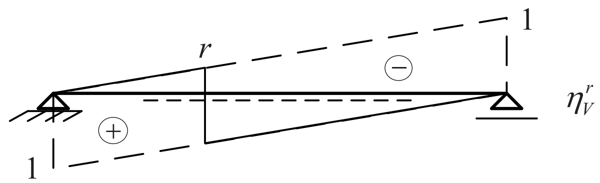
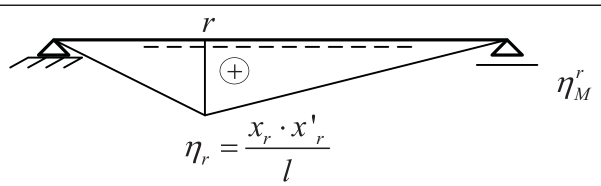


η_B – Linie

EL für Querkräfte und Momente:
Für die Ermittlung der EL der Querkräfte und Momente den belasteten Bereich betrachten!



Linker Bereich:	Rechter Bereich:
	
$\sum M_r :$ $M_r^{li} + 1 \cdot (x_r - x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_r = 0$ $M_r^{li} = \cancel{x_r} - \frac{x}{l} \cdot x_r - \cancel{x_r} + x$ $M_r^{li} = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x_r$	$\sum M_r :$ $\frac{x}{l} \cdot x'_r - 1 \cdot (x - x_r) - M_r^{re} = 0$ $M_r^{re} = \left(\frac{x'_r}{l} - 1\right) \cdot x + x_r$
$\sum V : 1 - \frac{x}{l} - 1 - V_r^{li} = 0 \Rightarrow V_r^{li} = -\frac{x}{l} = -B$	$\sum V : V_r^{re} + \frac{x}{l} - 1 - = 0 \Rightarrow V_r^{re} = 1 - \frac{x}{l} = A$

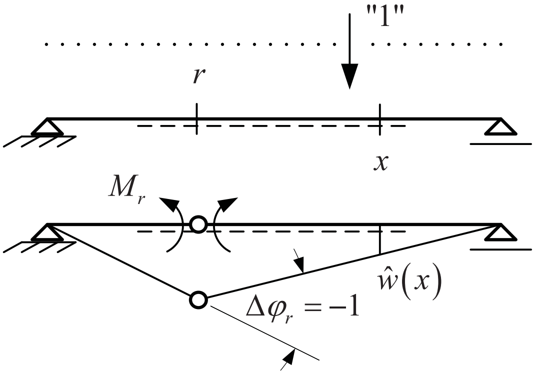
Einflusslinie für Querkräfte:	
Einflusslinie für Momente:	

Die oben erläuterte Methode kann auf einfache Systeme angewendet werden. Bei komplizierten Systemen ist sie aber sehr aufwendig. Die kinematische Methode ist in solchen Fällen besser geeignet!

7.3.1.2 Kinematische Methode

Die Einflusslinie kann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen (PvV) bestimmt werden.

Beispiel:



Arbeitssatz:

$$M_r \cdot \Delta\varphi_r + F \cdot \hat{w}(x) = 0 \rightarrow M_r = -F \cdot \frac{\hat{w}(x)}{\Delta\varphi_r} \qquad \text{mit F = 1} \qquad \Rightarrow M_r = -\frac{\hat{w}(x)}{\Delta\varphi_r}$$

Falls $\Delta\varphi_r = -1$, dann $M_r = \hat{w}(x) = \eta_M^r(x)$

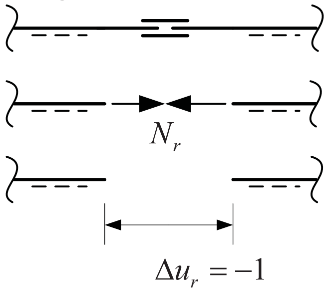
Diese Herleitung mit dem PvV geht auf Land zurück und wird auch als der Satz von Land bezeichnet.

Satz von Land: (Robert Land, 1882)
Die Einflusslinie von einer Kraftgröße ist gleich der Biegelinie, die man erhält, wenn man im Ort der gesuchten Größe ein korrespondierendes Gelenk einführt und im Gelenk einen zur gesuchten Kraftgröße korrespondierenden Verformungssprung von -1 einprägt.

Verformungssprung von -1 = Einheitsverformung/ Diskontinuität!
$\rightarrow$ Einflusslinie = Biegelinie infolge einer Einheitsverformung/ Diskontinuität!

Zuordnung der Kraftgrößen und der Einheitsverformungen/ Diskontinuität::

- Normalkraftgelenk: Diskontinuität als Spreizung

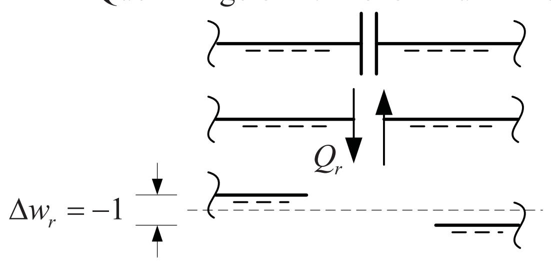


korrespondierendes Gelenk

korrespondierende pos. Kraftgröße N_r

korrespondierender Verformungssprung
hier: $\Delta u_r = -1$

- Querkraftgelenk : Diskontinuität als Sprung

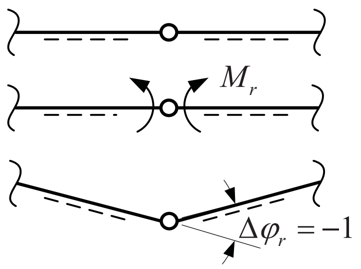


korrespondierendes Gelenk

korrespondierende pos. Kraftgröße Q_r

korrespondierender Verformungssprung
hier: $\Delta w_r = -1$

- Momentengelenk: Diskontinuität als Knick



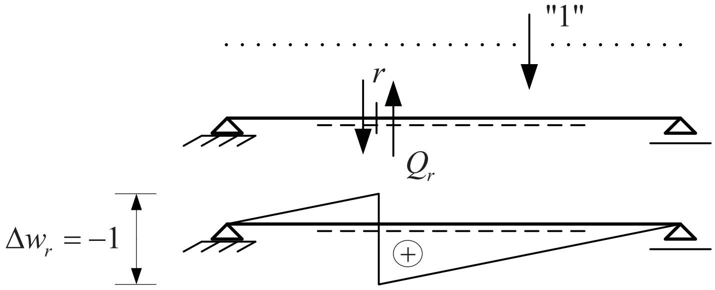
korrespondierendes Gelenk

korrespondierende pos. Kraftgröße M_r

korrespondierender Verformungssprung
hier : $\Delta\varphi_r = -1$

Das negative Vorzeichen bedeutet:
Die Einheitsverformung wirkt entgegen dem positiven Richtungssinn der korrespondierenden Kraftgröße!

Beispiel: Einflusslinie für die Querkraft Q an der Stelle r



Bemerkungen:
- **Nur** die Einflusslinien für Kraftgrößen bei statisch bestimmten Systemen verlaufen abschnittsweise geradlinig (linear)!
- Der Satz von Land gilt auch für die Bestimmung der Einflusslinien von Kraftgrößen bei statisch unbestimmten Systemen!

Vorgehensweise der kinematischen Methode (siehe auch Arbeitsblätter):
- Einführung eines zur gesuchten Kraftgröße korrespondierenden Gelenks im Aufpunkt r;
- Am Gelenk die korrespondierende Einheitsverformung -1 einprägen (entgegen der positiven Richtung der Kraftgröße);
- Zugehörige Biegelinie $w(x)$ bzw. kinematische Kette bestimmen.

Der Satz von Land führt bei statisch bestimmten Systemen zu kinematischen Systemen, so dass die Regeln der Kinematik eingesetzt werden können.

Bei statisch unbestimmten Systemen läuft die Bestimmung von EL für Kraftgrößen auf die Bestimmung der Biegelinie des Lastgurtes für einen Verformungslastfall mit der Diskontinuität -1 heraus.

7.3.2 Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch unbestimmten Systemen

Einsetzbar sind sowohl das Kraftgrößenverfahren als auch das Weggrößenverfahren. Hier werden 2 Methoden vorgestellt, die auf dem Kraftgrößenverfahren basieren.

7.3.2.1 Verwendung eines statisch bestimmten Grundsystems

Diese Methode wird auch als **„Getrennte Gelenkmethode"** bezeichnet. (Sie wird jedoch in den Übungen nicht behandelt)

Vorgehensweise:

- korrespondierendes Gelenk an Aufpunkt r einführen;
- statisch bestimmtes Grundsystem einführen, z.B. durch Einbau von Gelenken;
- Einheitsverformung am Gelenk am Aufpunkt r erteilen $\rightarrow \delta_{10}, \delta_{20}, ...$;

- η-Zustände betrachten:
  $X_1 = 1 \rightarrow \delta_{11}, \delta_{21}, ...,$
  $X_2 = 1 \rightarrow \delta_{12}, \delta_{22}, ...,$
  (mit Hilfe des Reduktionssatzes!);

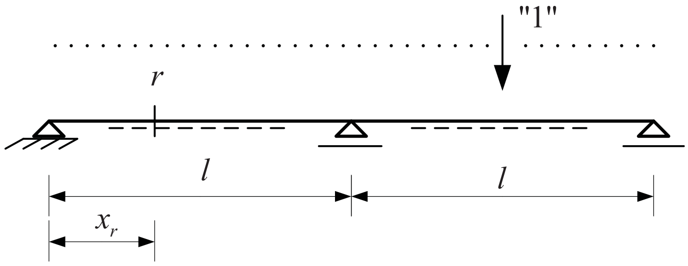
- Verträglichkeitsbedingungen verwenden:
  $$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + ... = 0$$
  $$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + ... = 0$$
  $$\vdots$$
  $X_1, X_2, ...;$

- Biegelinien $w_1, w_2; ...$ bestimmen;

- Superposition / Überlagerung der Biegelinien:
  $$w(x) = w_0 + X_1 w_1 + X_2 w_2 + ... \rightarrow \eta^r_{(x)} = w(x)$$
  Einflusslinie für die gesuchte Kraftgröße am Aufpunkt r!

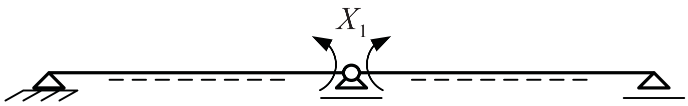
  Dabei:
  w_0 - kinematischer Anteil der Biegelinie
  w_1 - Biegelinie infolge $X_1 = 1$
  w_2 - Biegelinie infolge $X_2 = 1$.

Beispiel:
Einflusslinie für das Feldmoment am Punkt r in einem Zweifeldträger

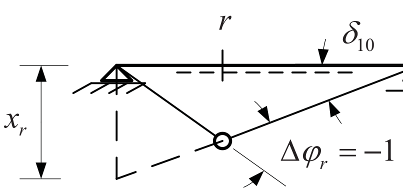


Lösungsweg: mit der „Getrennten Gelenkmethode“

Statisch bestimmtes Grundsystem:

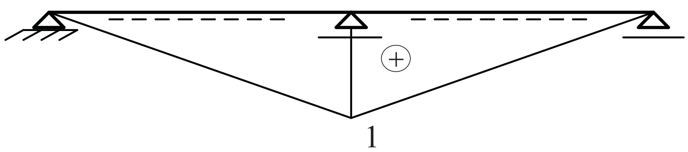


Nullzustand:



w_0-Linie $\quad EI\delta_{10} = EI \cdot \frac{x_r}{\ell}$

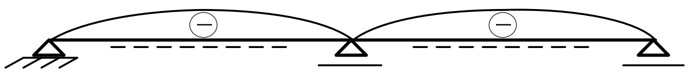
Einheitszustand:



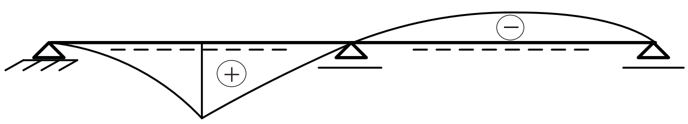
M_1-Linie

$$EI\delta_{11} = \int M_1^2 dx = \left(\frac{1}{3}\ell \cdot 1^2 + \frac{1}{3}\ell \cdot 1^2\right) = \frac{2}{3}\ell$$

$$\delta_{10} + X_1\delta_{11} = 0 \rightarrow X_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{\ell^2} x_r$$



$X_1 \cdot w_1$ (mit ω-Zahlen)



$M_r = w(x) = w_0 + X_1 \cdot w_1$

Einflusslinie für das Feldmoment im Punkt r.

Sonderfall: Einflusslinie für Stützmoment $x_r = \ell \rightarrow X_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{\ell}$

Da $w_0 = 0$, ist an Stelle B $\rightarrow M_B = X_1 w_1 = \eta_M^B$

7.3.2.2 Verwendung eines (a-1)-fach statisch unbestimmten Systems

Diese Methode wird auch als „Kombinierte Gelenkmethode" bezeichnet und wird in den Übungen behandelt.

Vorgehensweise:

- Im Aufpunkt r wird ein zur gesuchten Kraftgröße korrespondierendes Gelenk eingebaut $\rightarrow$ (a-1)-fach statisch unbestimmtes System (modifiziertes System);
- Eine Einheitskraftgröße an diesem Gelenk (am Aufpunkt r) verwenden;
- Lösung des (a-1)-fach statisch unbestimmten Systems $\rightarrow M_{(a-1)}; N_{(a-1)};$ usw.;
- Bestimmung der Verformung im Aufpunkt r $\rightarrow \delta_{rr}$;
- Bestimmung der Biegelinie des modifizierten Systems infolge der virtuellen Last (bzw. $M_{(a-1)}, N_{(a-1)}, \ldots$) $\delta_{xr}(x)$;
- Skalierung/ Normierung der Biegelinie um den Faktor $-\dfrac{1}{\delta_{rr}}$ liefert die Einflusslinie für die gesuchte Kraftgröße!

Bei diesem Verfahren wird die Einheitsverformung dem System nicht direkt, sondern indirekt aufgezwungen! Die Diskontinuität von -1 muss zuerst bestimmt werden.

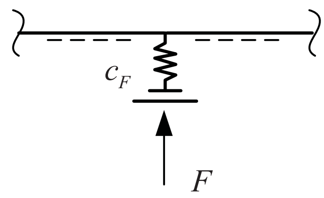
Bestimmung der Verformung δ_{rr}:

$$EI\delta_{rr} = \int N^2_{(a-1)} \frac{EI}{EA} dx + \int Q^2_{(a-1)} \cdot \frac{EI}{GA_s} dx + \int M^2_{(a-1)}\, dx + EI \sum \left(\frac{F^2_{(a-1)}}{c_F} + \frac{M^2_{(a-1)}}{c_M} \right)$$

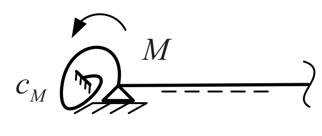
Dabei:

$M_{(a-1)}, N_{(a-1)}, F_{(a-1)}$ *und* $M_{(a-1)}$ sind die Schnittgrößen des modifizierten Systems ((a-1)-fach statisch unbestimmt!)

$F_{(a-1)}$ - Federkraft an der Wegfeder



$M_{f,(a-1)}$ - Federmoment an der Drehfeder



<u>Aufgrund des Reduktionssatzes:</u>

$$EI\delta_{rr} = \int N_{(a-1)} N_0 \frac{EI}{EA} dx + \int Q_{(a-1)} \cdot Q_0 \cdot \frac{EI}{GA_s} dx + \int M_{(a-1)} M_0 dx + EI \sum \left(\frac{F_{(a-1)} \cdot F_0}{c_F} + \frac{M_{(a-1)} \cdot M_0}{c_M} \right)$$

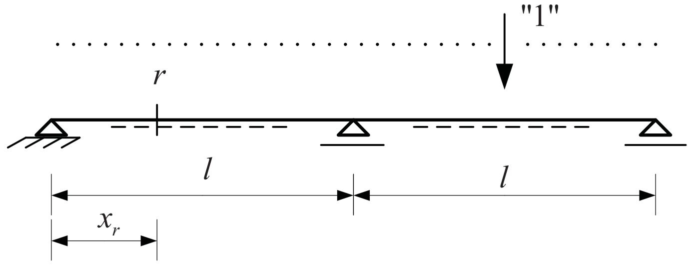
<u>Bestimmung der Biegelinie:</u> z.B. mit Hilfe der ω-Zahlen!

Bemerkung:

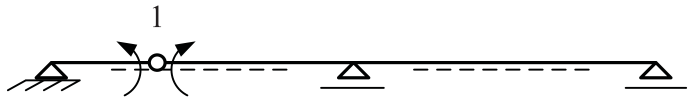
Die Einflusslinien für die Kraftgrößen bei statisch unbestimmten Systemen verlaufen krummlinig/ nichtlinear! (Im Gegensatz zu statisch bestimmten Systemen!)

Beispiel:
Einflusslinien für das Feldmoment am Aufpunkt r in einem Zweifeldträger

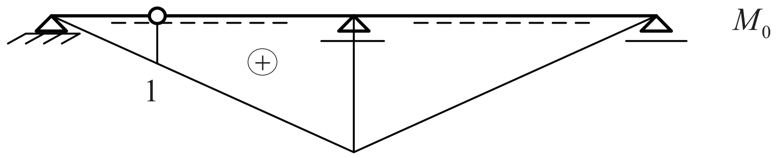
System ist 1-fach statisch unbestimmt: d.h. a = 1!



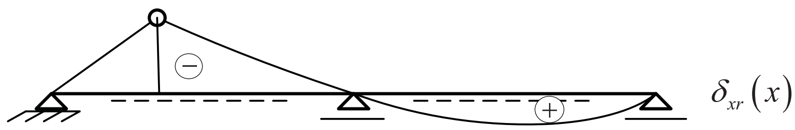
Modifiziertes System: (a-1)-fach statisch unbestimmt. Hier: statisch bestimmt.



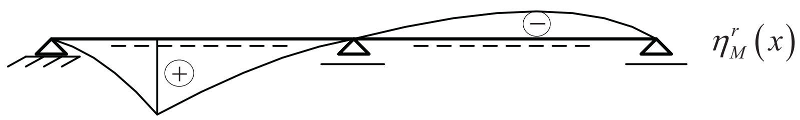
Moment $M_{(a-1)} = M_0$:



$$\delta_{rr} = \frac{1}{EI}\int M_0^2 dx$$



$\delta_{xr(x)}$ infolge $M_{(a-1)} = M_0$ (bzw. $M_r = 1$!)



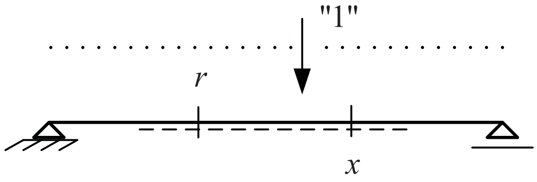
$$-\frac{\delta_{xr}}{\delta_{rr}} = w(x) = \eta_M^r(x)$$

7.4 Einflusslinien für Weggrößen (bzw. Verformungsgrößen)

Verformungsgrößen:

- Verschiebungen (u_r, w_r)
- Verdrehung/Drehwinkel (φ_r)

Vorgehensweise:
Eine Einflusslinie für eine Weggröße am Aufpunkt r gibt an, welchen Wert diese Weggröße annimmt, wenn eine Wanderlast F=1 an der Stelle x wirkt.

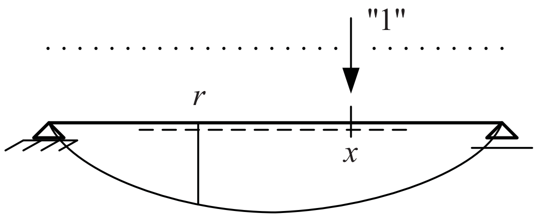


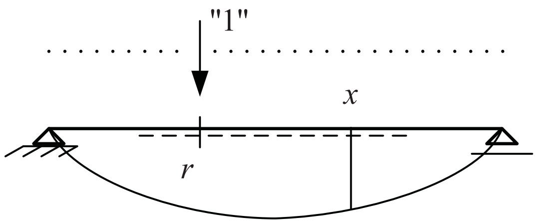
$$\delta_{rx}(x) = \eta_w^r(x)$$

Zur Bestimmung der EL $\delta_{rx}(x)$ kann der Satz von Maxwell verwendet werden.

7.4.1 Satz von Maxwell

Die Verschiebung an der Stelle r infolge einer Last an der Stelle x ist gleich der Verschiebung an der Stelle x infolge einer Last an der Stelle r!





$$\delta_{rx} = \delta_{xr}$$

δ_{rx} - EL für w_r infolge einer Wanderlast F=1 an der Stelle x

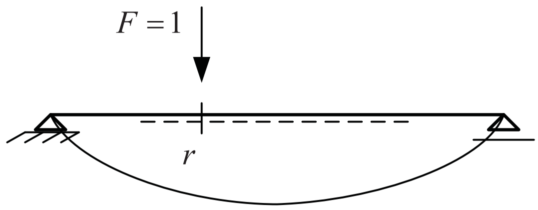
δ_{xr} - Biegelinie $w(x)$ infolge F=1 an der Stelle r

Daraus folgt:
Die Einflusslinie für eine Weggröße am Aufpunkt r ist gleich der Biegelinie $w(x)$ infolge einer Last F=1 am Aufpunkt r!

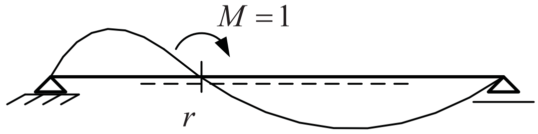
Bemerkungen:

- Der Satz von Maxwell gilt sowohl für statisch bestimmte als auch für statisch unbestimmte Systeme!
- Die EL für Weggrößen sind **immer nichtlinear gekrümmt**, unabhängig davon, ob ein System statisch bestimmt oder unbestimmt ist!
- Falls die EL für einen Drehwinkel gesucht ist, dann M=1 anstelle von F=1 verwenden.

EL für $w_r \Rightarrow \eta_w^r$



EL für $\varphi_r \Rightarrow \eta_\varphi^r$



7.4.2 Vorgehensweise zur Bestimmung der Einflusslinien für Weggrößen

Vorgehensweise:

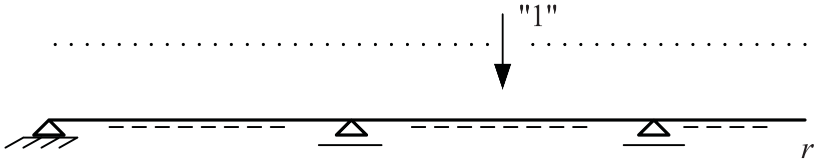
- Ansetzen einer Kraft F=1 am Aufpunkt r wenn die EL für eine Verschiebung gesucht ist.
- Ansetzen eines Momentes M=1 am Aufpunkt r wenn die EL für einen Drehwinkel bzw. eine Verdrehung gesucht ist.
- Bestimmung der Schnittgrößen
- Bestimmung der Biegelinie (z.B. mit ω-Zahlen)
- $\eta_{(-)}^r = w(x)$

Einheiten (abhängig von der Darstellungsart, kann auch in [m] angegeben werden):

EL für Verschiebung: $\eta_w^r(x): \left[\dfrac{m}{kN}\right]$

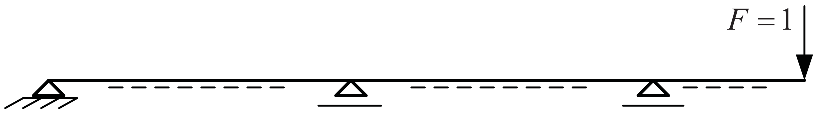
EL für Verdrehung: $\eta_\varphi^r(x): \left[\dfrac{1}{kN}\right]$

Beispiel 1: Gesucht: EL für w_r

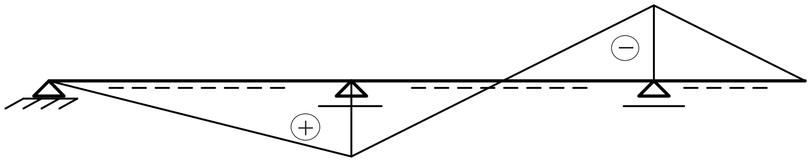


Lösungsweg:

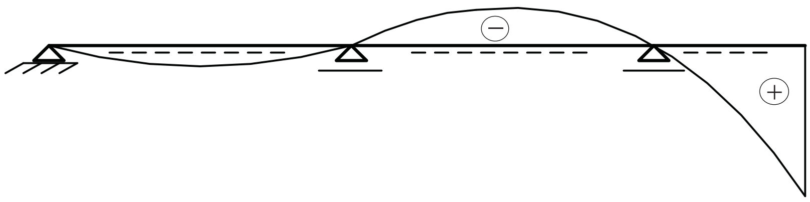
1. F=1



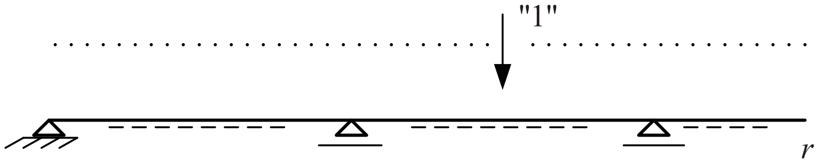
2. M-Linie



3. Biegelinie $w(x) = \eta_w^r(x)$



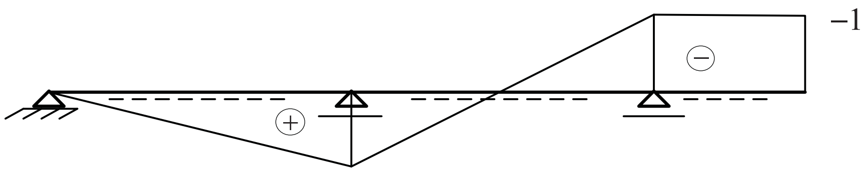
Beispiel 2: Gesucht: EL für die Verdrehung φ_r



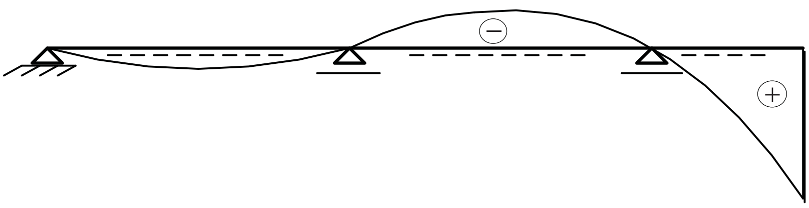
Lösungsweg:

1. $M_r = 1$

2. M-Linie



3. Biegelinie $w(x) = \eta_\varphi^r(x)$



7.5 Auswertung von Einflusslinien (hier für Kraftlastfälle)

Bedeutungen der Einflusslinien:

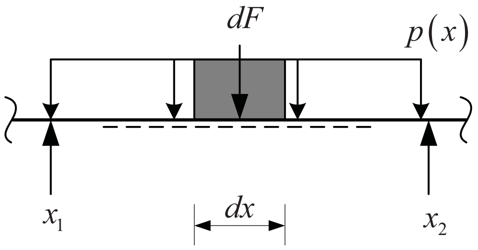
- Bestimmung der ungünstigsten Laststellungen, die zu einer maximalen Zustandsgröße Z_r am Aufpunkt r führen;
- Bestimmung der maximalen Bemessungswerte einer Zustandsgröße Z_r .

Auswertungsformeln:

$F = 1 \rightarrow \eta$

$F \neq 1 \rightarrow F \cdot \eta$

Bei Streckenlast $p(x)$:



$$dF = p(x) \cdot dx \rightarrow dF \cdot \eta(x) = p(x) \cdot \eta(x) \cdot dx \rightarrow \int_{x1}^{x2} p(x) \cdot \eta(x) \cdot dx$$

Allgemein: gemäß Superpositionsprinzip

$$Z_r = \sum F_i \cdot \eta_i + \int p(x) \cdot \eta(x) \cdot dx$$

Sonderfall:

$p(x) = const = p$

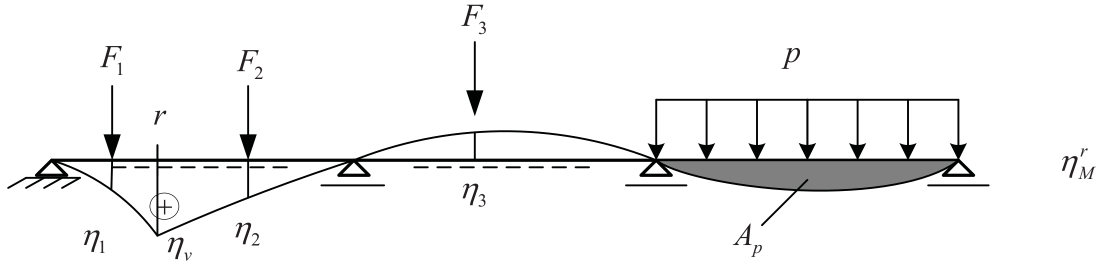
$\int p(x) \cdot \eta(x) \cdot dx = p \int \eta(x) \cdot dx = p \cdot A_p$

Dabei: A_p - Fläche der Einflusslinie im Bereich p

F_i - Einzellasten eines Lastenzuges

η_i - Einflussordinaten unter den Einzellasten

Beispiel.: Dreifeldträger



$$M_r = \underbrace{F_1\eta_1 + F_2\eta_2 + F_3\eta_3}_{\sum_{i=1}^{3} F_i\eta_1} + p \cdot A_p$$