8. Flächentragwerke

8.1 Einführung

8.1 Einführung

Aufteilung nach der geometrischen Form und Belastung:

Tragwerke

- Stabtragwerke
  - Stab
  - Balken
  - Bogen
  - Rahmen
  - Fachwerke
  - Seil, Kette (Sonderfall)
- Flächentragwerke
  - Scheiben
  - Platten
  - Schalen
  - Faltwerke
  - Membran

8.1 Einführung

Aufteilung nach der Lage in der Ebene / im Raum:

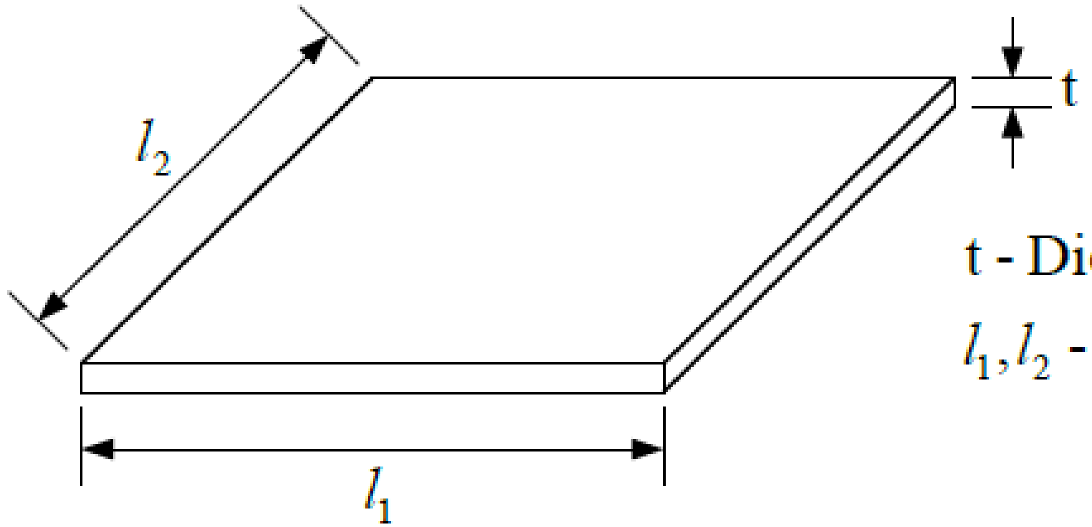
Tragwerke

- Ebene Tragwerke
  (Tragwerke in der Ebene)
- Räumliche Tragwerke
  (Tragwerke im Raum)

8.1 Einführung

Flächentragwerke:

Definition: Dicke viel kleiner als die Seitenlängen!



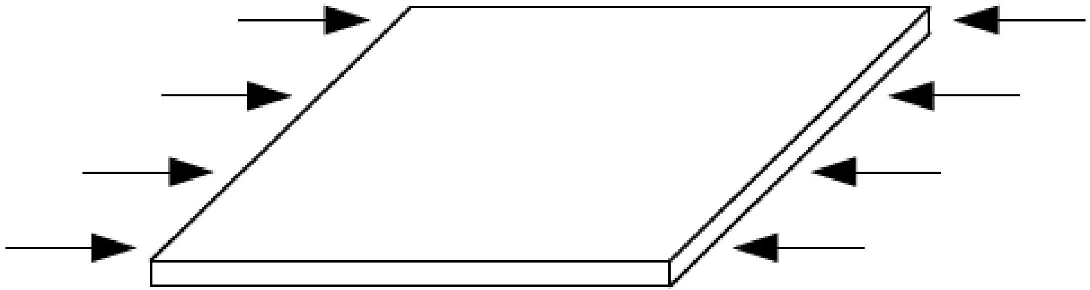
t - Dicke

l_1, l_2 - Seitenlängen

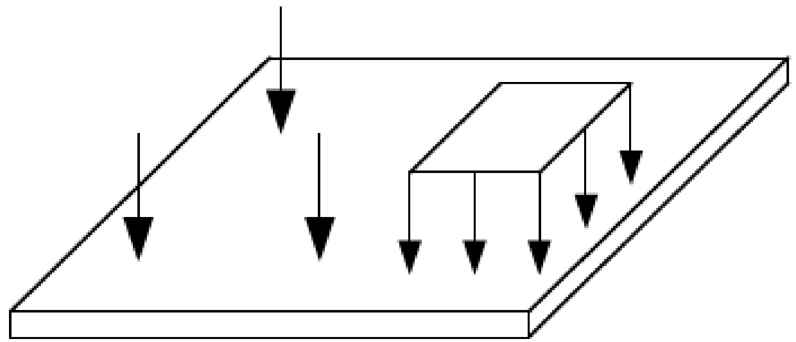
$$l_1, l_2 >> t$$

8.1 Einführung

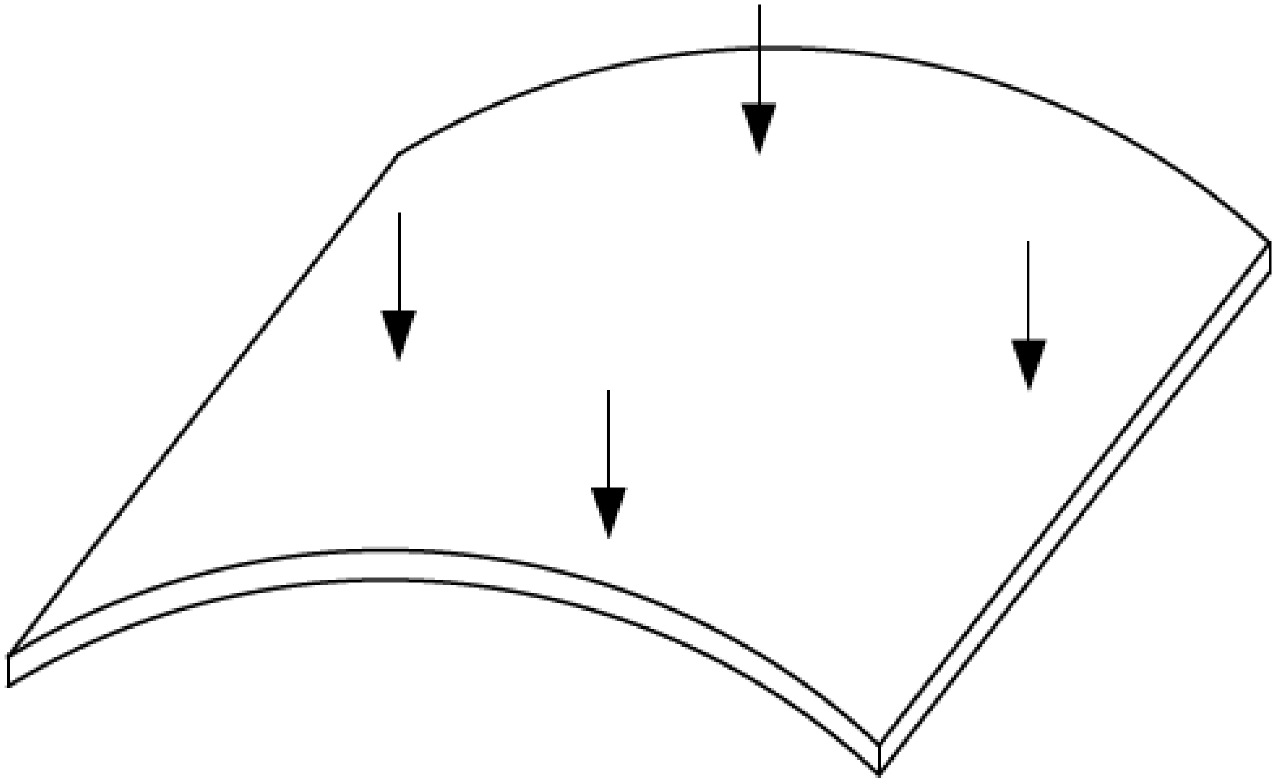
Scheiben: Belastung in ihrer Ebene



Platten: Belastung quer zu ihrer Ebene

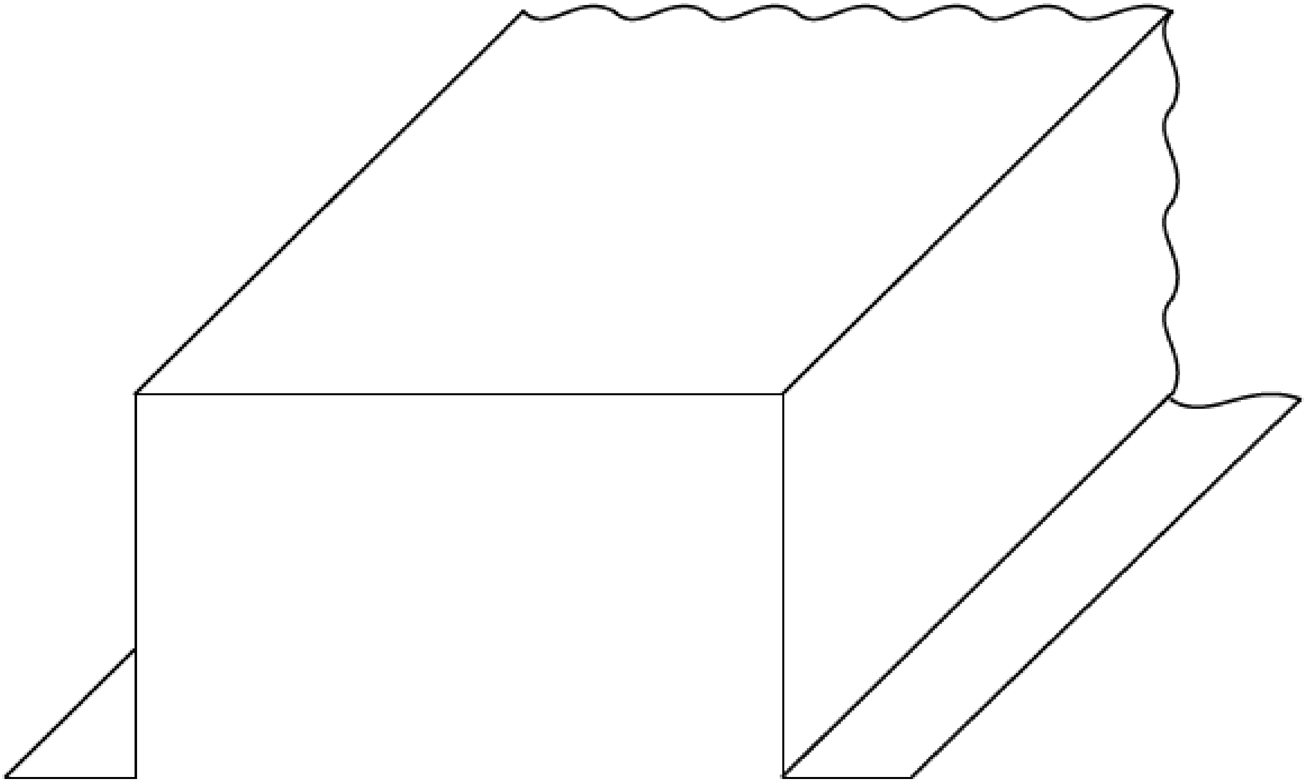


Schale: Gekrümmtes Flächentragwerk



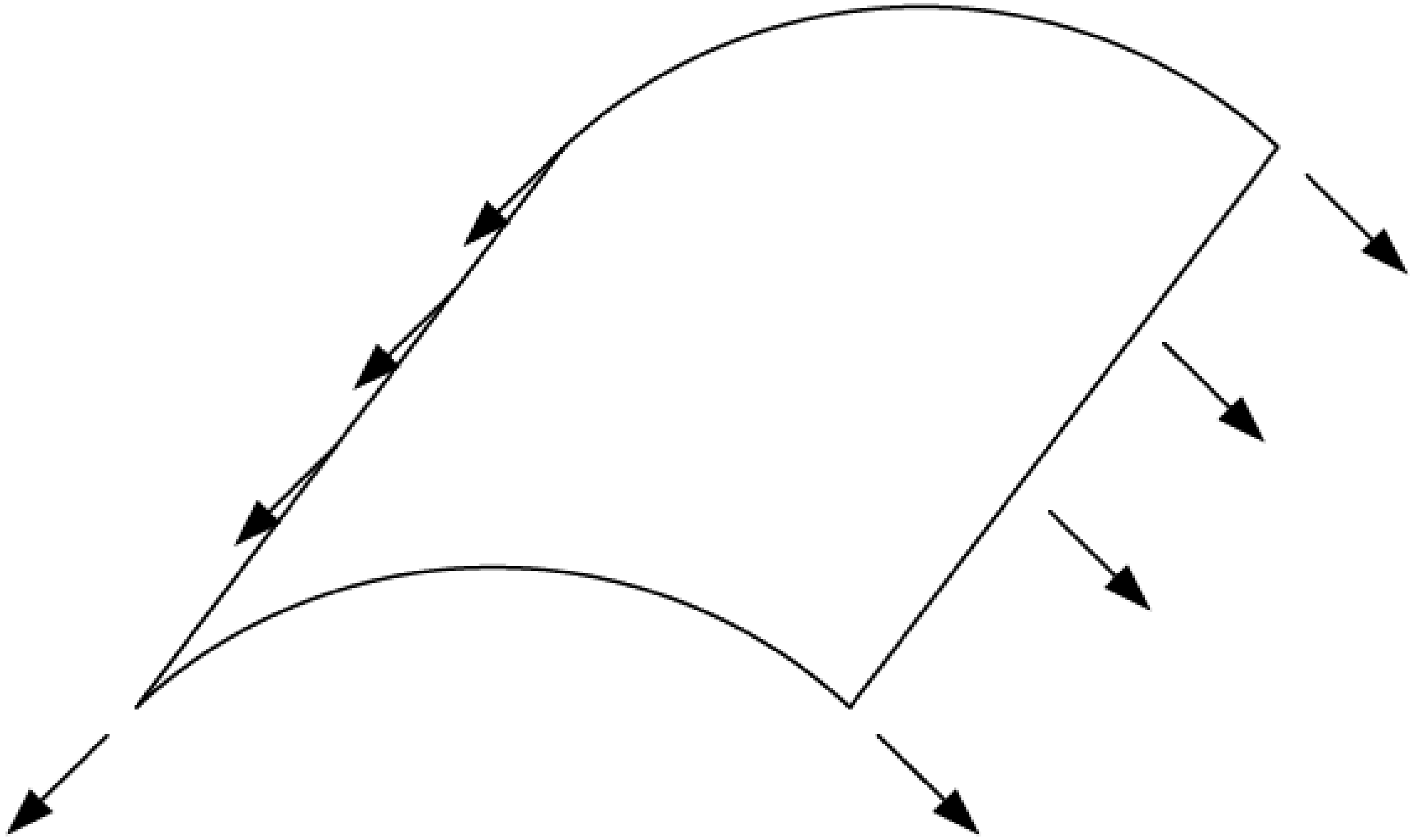
8.1 Einführung

Faltwerke: Abgeknickte Scheiben oder Platten, die starr miteinander verbunden sind.



8.1 Einführung

Membran: Gekrümmtes Flächentragwerk, welches nur Normalkräfte (Membrankräfte) trägt (Sonderfall von Schalen)



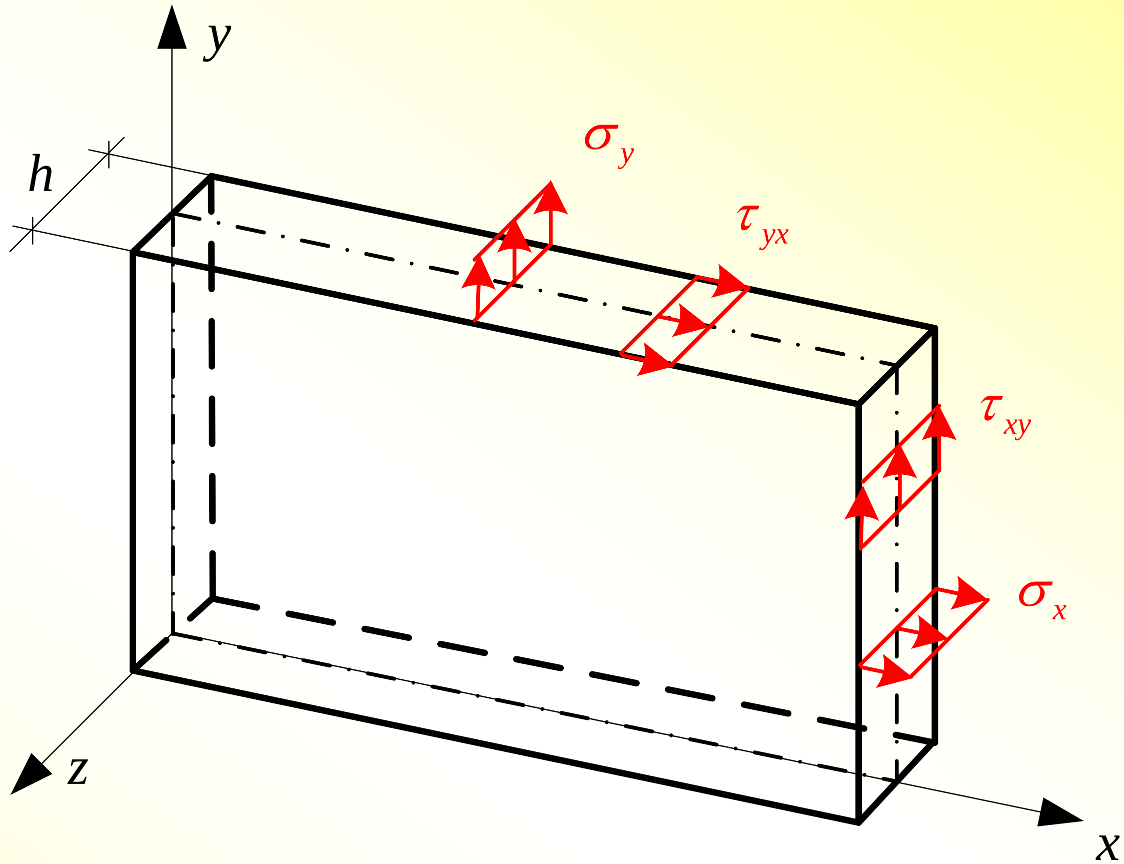
8.2 Scheiben

Annahme:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$$

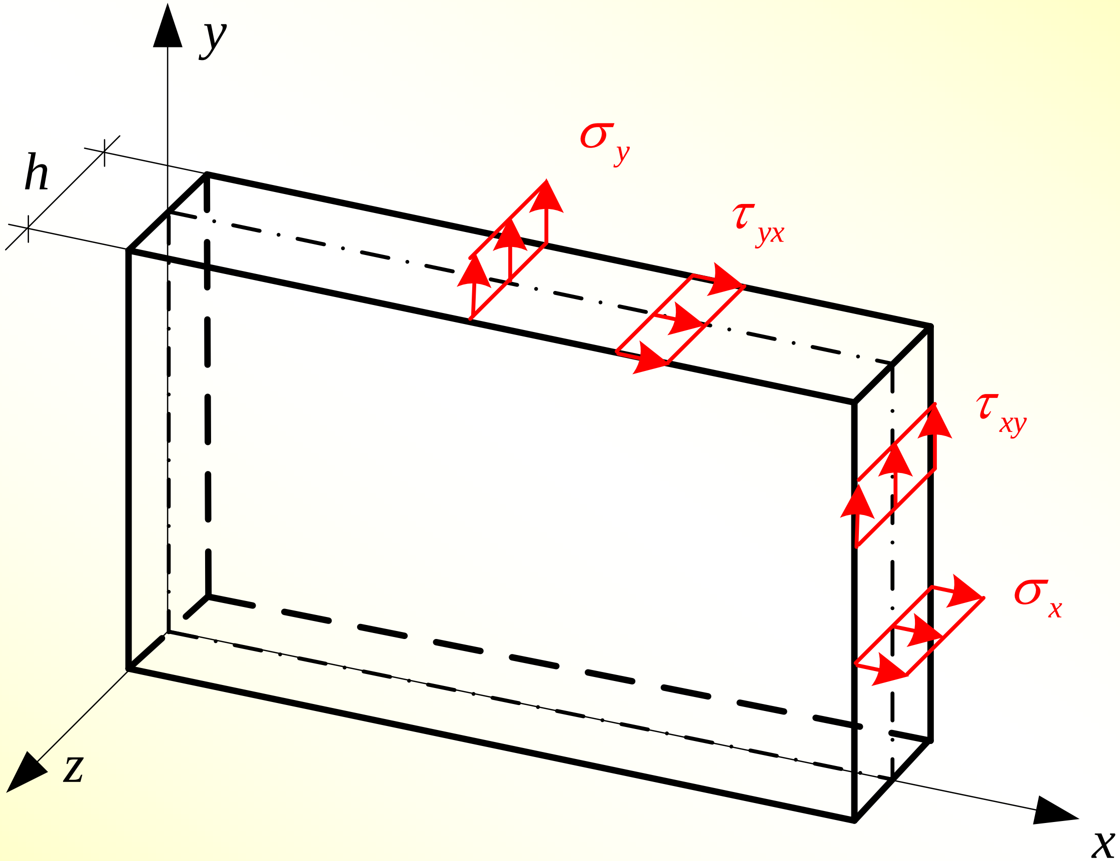
Ebener Spannungszustand (ESZ)



Annahme:

Alle Spannungskomponenten sind konstant über h=t , da h sehr klein ist!

Spannungen



8.2.1 Schnittgrößen

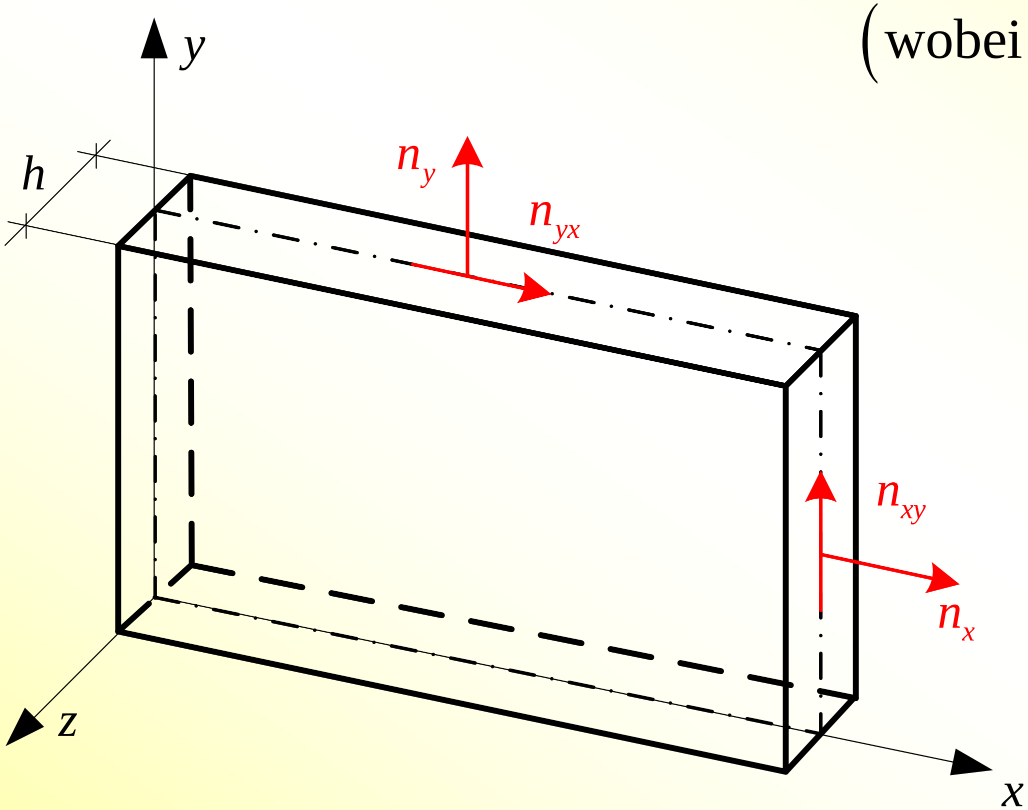
Scheibenkräfte

Normalkräfte in x-Richtung: $n_x = \sigma_x \cdot h$

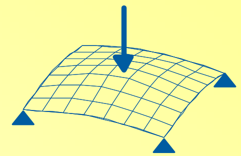
Normalkräfte in y-Richtung: $n_y = \sigma_y \cdot h$

Schubkräfte: $n_{xy} = \sigma_{xy} \cdot h = \tau_{xy} \cdot h$

$\left(\text{wobei } n_{xy} = n_{yx}, \text{ da } \tau_{xy} = \tau_{yx}\right)$



8.2.2 Grundgleichungen



1.) Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

2.) Kinematik

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3.) Verträglichkeitsbedingung (Kompatibilitätsbedingung)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}$$

8.2.2 Grundgleichungen

4.) Hookesches Gesetz

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \nu \sigma_y \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \nu \sigma_x \right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & \nu/E & 0 \\ \nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy}$$

mit: Querkontraktionszahl ν

$$\text{Schubmodul } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

8.2.2 Grundgleichungen

Darstellung für die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x \right)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

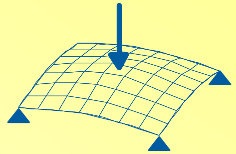
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\nu/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

8.2.2 Grundgleichungen

8 Gleichungen für 8 Unbekannten:

2 Verschiebungsgrößen
3 Verzerrungen (2 Dehnungen + 1 Gleitung)
3 Spannungskomponenten

8.2.3 Verschiebungsdifferentialgleichungen



Eliminiert man die Verzerrungen und die Spannungen, dann erhält man die Verschiebungsdifferenzialgleichungen.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

8.2.3 Verschiebungsdifferentialgleichungen

Einsetzen in die Gleichgewichtsgleichungen liefert:

$$\frac{2G}{1-\nu}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G\left(1+\frac{2G}{1-\nu}\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+G\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f_x=0$$

$$\frac{2G}{1-\nu}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+G\left(1+\frac{2G}{1-\nu}\right)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+G\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f_y=0$$

2 gekoppelte Dgl. Für 2 Unbekannten u und v!

Analytische Lösungen nur für spezielle Fälle möglich.
Im Allgemeinen müssen numerische Methoden verwendet werden (Finite-Element-Methode=FEM, Randelementmethode=BEM, usw.).

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion

Löst man die Grundgleichungen nach den Spannungen auf, dann erhält man die Spannungsdifferentialgleichungen.
Diese Formulierung ist sinnvoll, wenn man nur an den Spannungen interessiert ist und wenn ausschließlich Spannungsrandbedingungen vorgegeben sind.

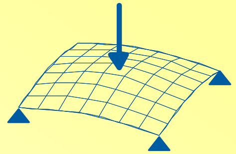
Einsetzen des Hookeschen Gesetzes in die Kompatibilitätsbedingung liefert:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 2(1+\nu) \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Differentiation der ersten Gleichgewichtsgleichung nach x:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0$$

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion



Differentiation der zweiten Gleichgewichtsgleichung nach y:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0$$

Addition beider Gleichungen:

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

In die Kompatibilitätsgleichung eingesetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\left(1+\nu\right)\cdot\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion

Oder:

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\left(1+\nu\right)\cdot\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

Mit:

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ Laplace-Operator

Sonderfall: Keine Volumenkräfte $f_x = f_y = 0$

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$$ Potentialgleichung

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Gleichgewichtsgleichungen}$$

Man hat also 3 Gleichungen für 3 Unbekannten: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Das obige Gleichungssystem kann auf eine Dgl. reduziert werden, indem man die Airysche Spannungsfunktion $F(x,y)$ wie folgt einführt (G. B. Airy, 1801-1892):

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$$

Damit sind die 2 Gleichgewichtsgleichungen automatisch erfüllt.

Die Kompatibilitätsgleichung lautet nun:

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \Delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \Delta\Delta\, F = 0$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\Delta\Delta\, F = 0}$$

Bipotentialgleichung,
Biharmonische Dgl.,
Scheibengleichung!

8.2.4 Spannungsdifferentialgleichungen und Spannungsfunktion

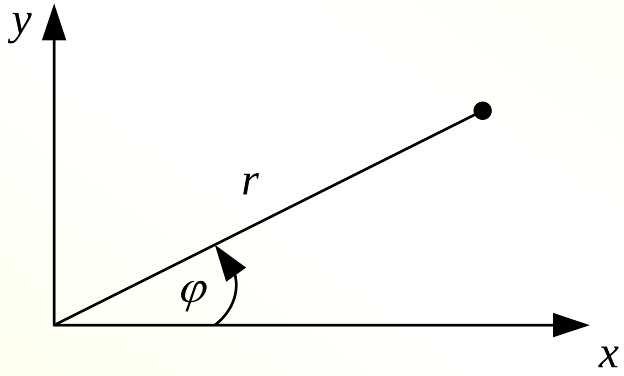
Ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Damit ist das Scheibenproblem auf eine einzige Dgl. 4-ter Ordnung zurückgeführt!

8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten

Koordinatentransformation:



$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

Ableitungsregeln:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \sin\varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \cos\varphi$$

8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^4}\left(4\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}\right)$$

Scheibengleichung:

$$\Delta\Delta F =$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial F}{\partial r} - 2\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^4}\left(4\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4}\right) = 0$$

8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten

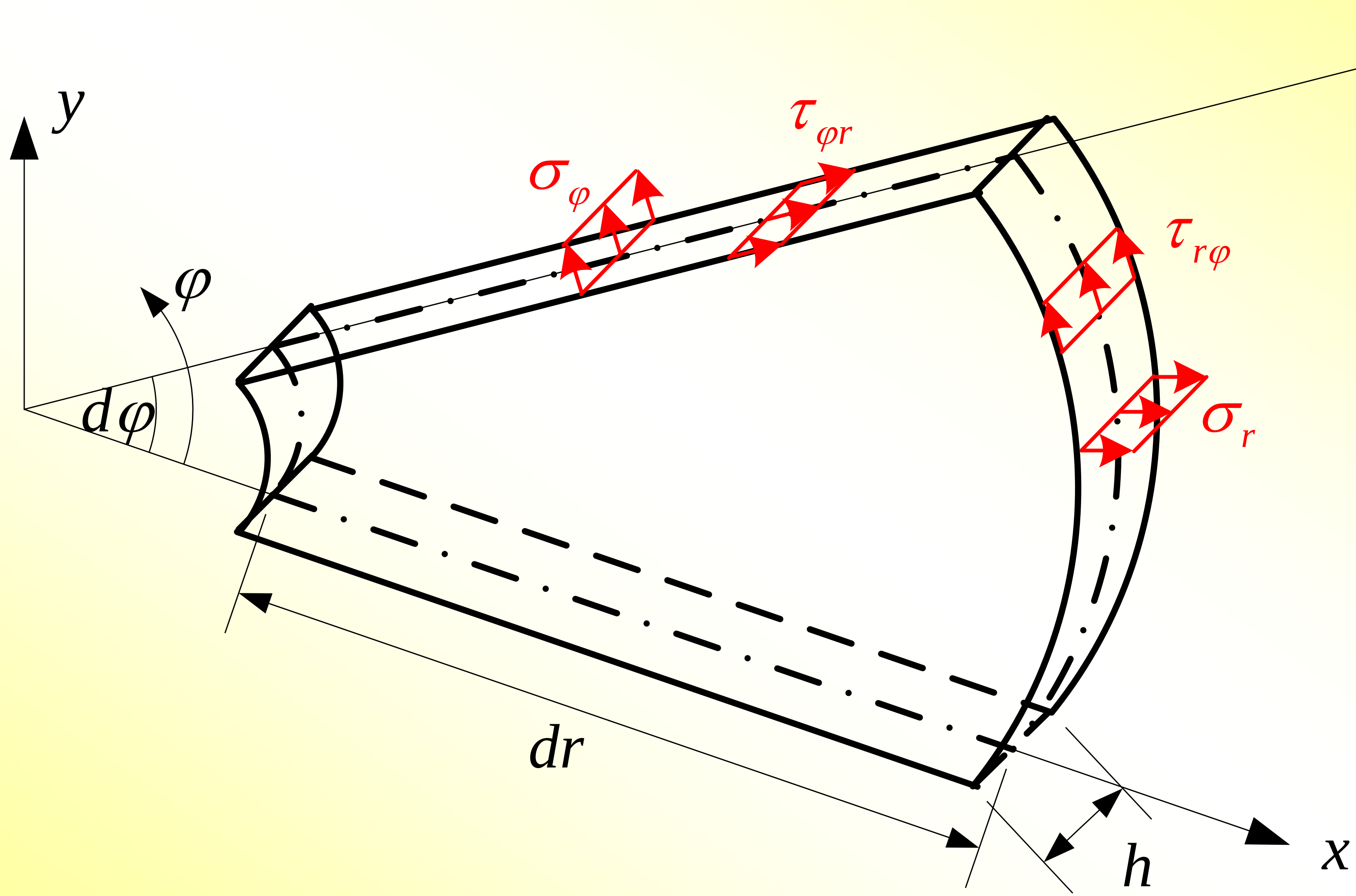
Spannungskomponenten:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}$$

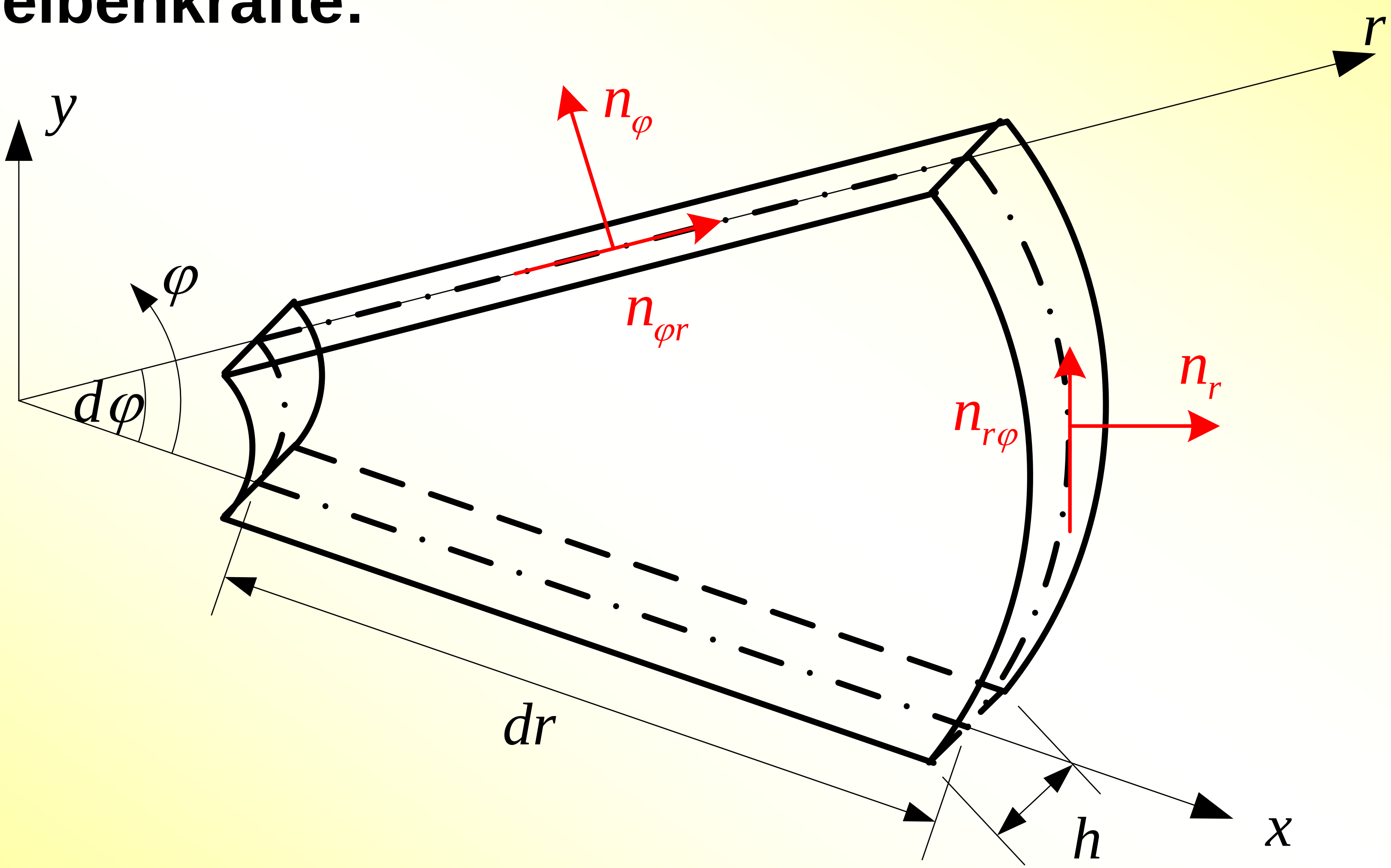
$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten



Scheibenkräfte:



8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten

Hookesches Gesetz:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_r - \nu \sigma_\varphi \right)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_\varphi - \nu \sigma_r \right)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{r\varphi}$$

Kinematik:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}$$

Scheibengleichung:

$$\Delta\Delta F =$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial F}{\partial r} - 2\frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{r^4}\left(4\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4}\right) = 0$$

8.2.5 Scheibengleichung in Polarkoordinaten

Sonderfälle:

1.) Rotationssymmetrische bzw. axialsymmetrische Probleme

F ist unabhängig vom Winkel φ : $\quad F = F(r)$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}$$

Scheibengleichung:

$$\Delta\Delta\, F = \frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dF}{dr} = 0$$

Euler’sche Differentialgleichung

2.) F **ist unabhängig von** r**:** $F = F(\varphi)$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

Scheibengleichung:

$$\Delta\Delta\, F = \frac{d^4 F}{d\varphi^4} + 4\frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0$$

8.2.6 Lösungen der Scheibengleichung

Eine allgemeine Lösung der Scheibengleichung kann man nicht angeben. Es ist aber möglich, spezielle Lösungen herzuleiten. Im Folgenden sind einige spezielle Lösungen zusammengestellt.

Werden die Randbedingungen durch eine passende Spannungsfunktion erfüllt, dann ist das Randwertproblem bezüglich der Spannungen gelöst.

Die Verschiebungen lassen sich dann unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes durch die Integration der Verzerrungen bestimmen.

8.2.6 Lösungen der Scheibengleichung

Allgemeine Vorgehensweise:

Scheibengleichung $\Delta\Delta\, F = 0$

$\downarrow$ ← Lösung der Dgl.

Spannungsfunktion F

$\downarrow$ ← Definition von F

Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$\downarrow$ ← Hookesches Gesetz

Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

$\downarrow$ ← Kinematik + Integration

Verschiebungen u, v

Lösungen der Scheibengleichung $\Delta\Delta\, F = 0$

Koordinaten	F
$x,\ y$	$c,\ x,\ x^2,\ x^3,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x^4y - x^2y^3,\ x^4 - 3x^2y^2,$ $x^5 - 5x^3y^2,\ x^5y - (5/3)x^3y^3,\ x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4,$ $e^{\pm\lambda y}\cos(\lambda x),\ xe^{\pm\lambda y}\cos(\lambda x),\ (x^2+y^2)e^{\pm\lambda y}\cos(\lambda x),$ $\ln(x^2+y^2),\ x\ln(x^2+y^2),$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{2\pi n}{l}y}\cos(\frac{2\pi n}{l}x),$ $\int_0^{\infty}\left[A(\xi)e^{-\xi y}\cos(\xi x) + B(\xi)e^{-\xi y}\sin(\xi x)\right]d\xi$ $x \leftrightarrow y$ austauschbar, $\cos(\cdot) \leftrightarrow \sin(\cdot)$ austauschbar!

Lösungen der Scheibengleichung $\Delta\Delta\, F = 0$

$r,\ \varphi$	$c,\ r^2,\ \ln r,\ r^2 \ln r,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ r^2\varphi,\ \varphi \ln r,$ $r^2\varphi \ln r,\ r\ln r \cos\varphi,\ r\varphi\cos\varphi,$ $(a_n r^n + b_n r^{-n} + c_n r^{n+2} + d_n r^{-n+2})\cos(n\varphi)\ (n = 1, 2, 3, \ldots),$ *Rotationssymmetrie: F unabhängig von* φ: $F(r) = c_0 + c_1 \ln r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln r$ *F unabhängig von r:* $F(\varphi) = c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3 \cos(2\varphi) + c_4 \sin(2\varphi)$ $\cos(\cdot) \leftrightarrow \sin(\cdot)$ austauschbar!

8.2.7 Ebener Verzerrungszustand

Bei Damm und dickwandigem Rohr unter Innendruck gilt:

$$w = 0,\ u(x,y),\ v(x,y) \neq 0$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \neq 0$$

Ebener Verzerrungszustand (EVZ)
bzw.
Ebener Dehnungszustand (EDZ)

8.2.7 Ebener Verzerrungszustand

Hookesches Gesetz im drei-dimensionalen (3D) Fall:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}.$$

8.2.7 Ebener Verzerrungszustand

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Einsetzen von σ_z in ε_x und ε_y liefert:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} \cdot \left(\sigma_x - \nu' \sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E'} \cdot \left(\sigma_y - \nu' \sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G'} \cdot \tau_{xy}$$

8.2.7 Ebener Verzerrungszustand

Mit: $$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad G' = G$$

Ein Vergleich mit dem Hookeschen Gesetz im ESZ zeigt, dass das Hookesche Gesetz im EVZ gleich dem im ESZ ist, wenn E durch E' und ν durch ν' ersetzt sind!

Alle anderen Grundgleichungen im EVZ sind gleich denen im ESZ.

8.2.7 Ebener Verzerrungszustand

Falls man die Lösungen für ESZ kennt, dann kann man die entsprechenden Lösungen für EVZ direkt erhalten, indem man in den Lösungen für ESZ E durch E' und ν durch ν' ersetzt.