

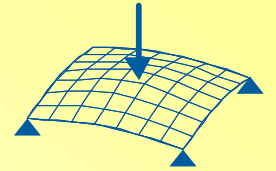
## 2. Stabilitätsprobleme und Theorie II. Ordnung

2.3 Elementsteifigkeitsmatrix und Lastvektor nach Th. II. Ordnung

2.3.1 Steifigkeitsmatrix und Grundformeln

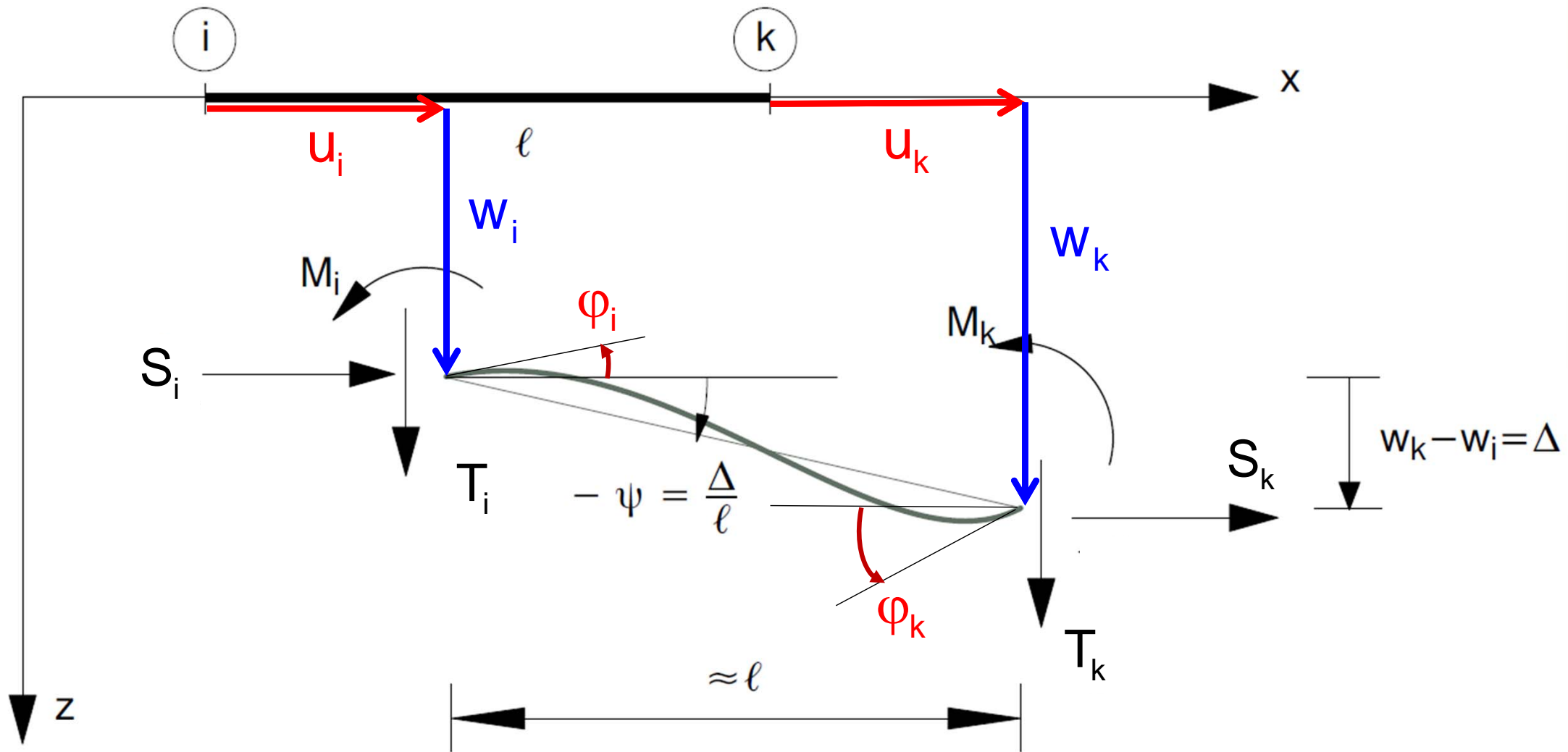
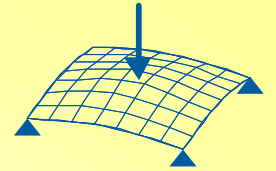
2.3.2 Lastvektor

2.3.3 Koordinatentransformation

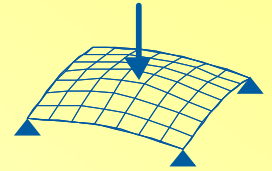


## 2.3.1 Steifigkeitsmatrix und Grundformeln

# Unverformtes und verformtes Element



# Elementsteifigkeitsbeziehung



$$\vec{s} = \begin{pmatrix} S_i \\ T_i \\ M_i \\ S_k \\ T_k \\ M_k \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

$\vec{s}$ : Stabendkraftvektor

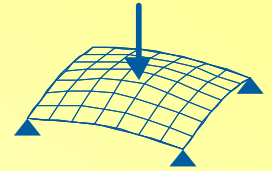
$\vec{d}$ : Stabendverschiebungsvektor

Elementsteifigkeitsbeziehung:

$$\vec{s} = \underline{\underline{\mathbf{k}}} \cdot \vec{d}$$

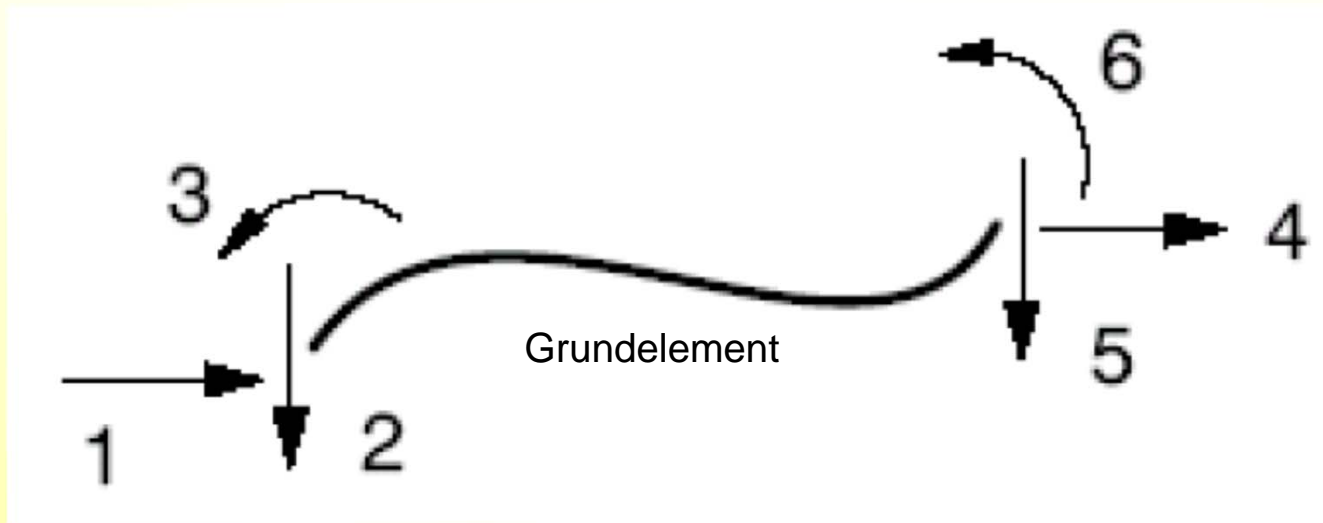
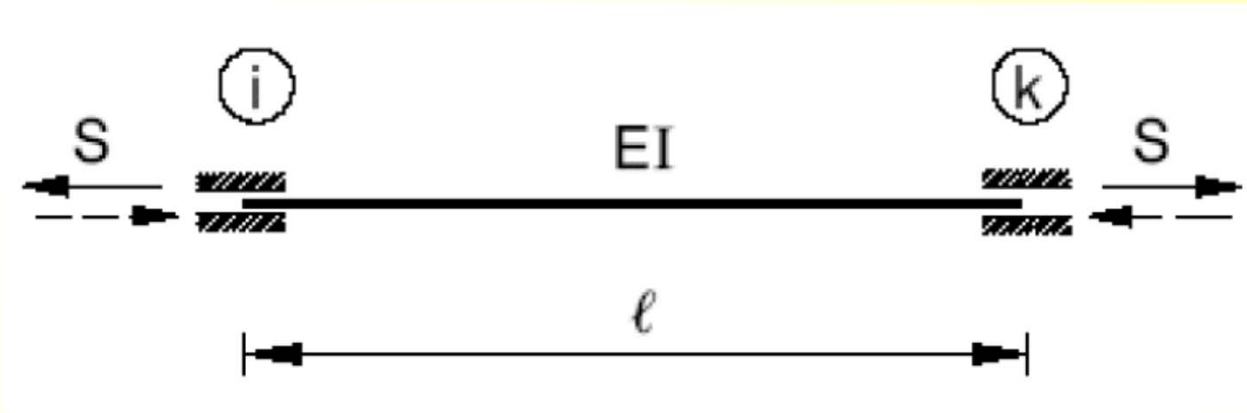
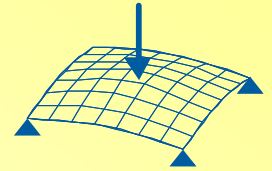
$\underline{\underline{\mathbf{k}}}$ : Elementsteifigkeitsmatrix

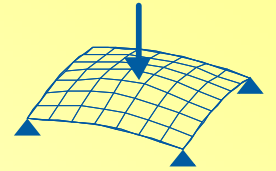
# Elementsteifigkeitsbeziehung



- Der Zusammenhang zwischen den Stabendkräften und den Stabendverformungen wird durch die Elementsteifigkeitsmatrix beschrieben.
- Die Elementsteifigkeitsmatrix muss für ein verformtes Element hergeleitet werden.
- Die Elementsteifigkeitsmatrix kann durch zwei unterschiedliche Methoden hergeleitet werden:
  - 1) Herleitung mit der homogenen Lösung der Differentialgleichung.
  - 2) Herleitung mit den Grundformeln (Tabelle für Stabendkräfte).

# Grundelement





# Herleitung mit der homogenen Lösung der Dgl

**Beispiel:** Grundelement mit  $EA = \infty$

Aus der homogenen Lösung der Dgl (vgl. Abschnitt 2.2):

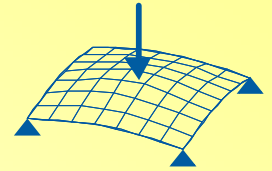
$$\begin{pmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_k \\ \varphi_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon/l & 0 & -\varepsilon/l \\ 1 & \varepsilon & c & s \\ 0 & -\varepsilon/l & (\varepsilon/l) \cdot s & -(\varepsilon/l) \cdot c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ x=l \end{array}$$

$\vec{d} \qquad \underline{\underline{A}} \qquad \vec{C}$

$$\vec{d} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{C}$$



$$\vec{C} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{d}$$



# Herleitung mit der homogenen Lösung der Dgl

Ähnlich für den Stabendkraftvektor:

$$\begin{pmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{pmatrix} = S \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon / l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon / l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array}$$

$\vec{s} \qquad \underline{\underline{B}} \qquad \vec{C}$

$$\vec{s} = \underline{\underline{B}} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{C} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{d}$$

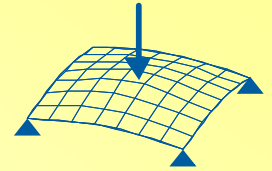
$$\vec{s} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{d} = \underline{\underline{k}} \cdot \vec{d}$$

**Steifigkeitsmatrix:**

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$$



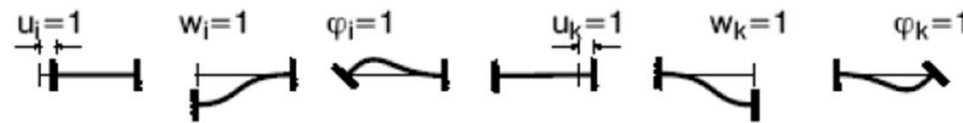
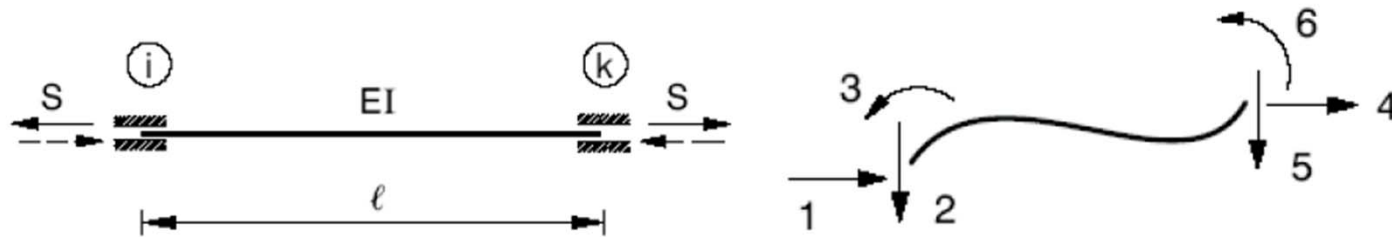
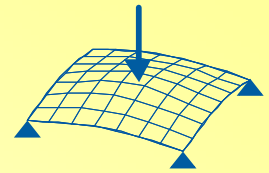
# Herleitung mit den Grundformeln



Stabkennzahl:  $\varepsilon = \alpha$

Lastfall	
	$M_{ik} = \frac{EI}{\ell} \cdot A' \varphi_i$ $M_{ki} = \frac{EI}{\ell} \cdot B' \varphi_i$
	$M_{ik} = \frac{EI}{\ell} \cdot B' \varphi_k$ $M_{ki} = \frac{EI}{\ell} \cdot A' \varphi_k$
	$M_{ik} = \frac{EI}{\ell^2} \cdot D' w_k$ $M_{ki} = \frac{EI}{\ell^2} \cdot D' w_k$

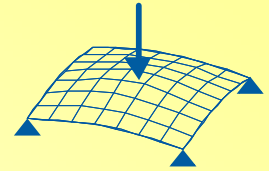
# Steifigkeitsmatrix für Grundelement



$$\begin{bmatrix} S_i \\ T_i \\ M_i \\ S_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2D'}{l^2} \pm \frac{S}{EI} & -\frac{D'}{l} & 0 & -\frac{2D'}{l^2} \mp \frac{S}{EI} & -\frac{D'}{l} \\ 0 & -\frac{D'}{l} & A' & 0 & \frac{D'}{l} & B' \\ \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & \frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2D'}{l^2} \pm \frac{S}{EI} & \frac{D'}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D'}{l} & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

*symm.*

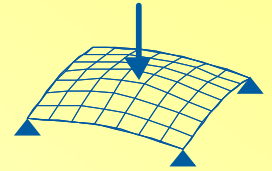
# Abkürzungen nach Chwalla



$$\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|S|}{EI}}$$

Wert	S als Druckkraft	S als Zugkraft
$A'$	$\frac{\varepsilon \cdot (\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon)}{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}$	$\frac{\varepsilon \cdot (\sinh \varepsilon - \varepsilon \cdot \cosh \varepsilon)}{2 \cdot (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon}$
$B'$	$\frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}$	$\frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - \sinh \varepsilon)}{2 \cdot (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon}$
$D' = A' + B'$	$\frac{\varepsilon^2 \cdot (1 - \cos \varepsilon)}{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}$	$\frac{\varepsilon^2 \cdot (1 - \cosh \varepsilon)}{2 \cdot (\cosh \varepsilon - 1) - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon}$
$C'$	$\frac{\varepsilon^2 \cdot \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}$	$\frac{\varepsilon^2 \cdot \sinh \varepsilon}{\varepsilon \cdot \cosh \varepsilon - \sinh \varepsilon}$
$A' - B'$	$\frac{\varepsilon \cdot (1 + \cos \varepsilon)}{\sin \varepsilon}$	$\frac{\varepsilon \cdot (1 + \cosh \varepsilon)}{\sinh \varepsilon}$
$V'$	$12 \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}{\varepsilon^3 \cdot \sin \varepsilon}$	$12 \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cosh \varepsilon) + \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon}{\varepsilon^3 \cdot \sinh \varepsilon}$

# Bemerkungen



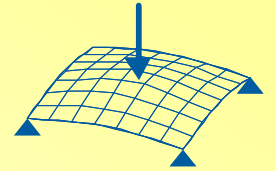
- Der Einfluss der Stabkrümmung wird in den Termen  $A'$ ,  $B'$  und  $D'$  berücksichtigt.
- Der Einfluss der Stabverdrehung (P- $\Delta$ -Effekt) wird im Anteil  $S/l$  berücksichtigt.
- $S$  bringt einen Beitrag zu  $T_i$  und  $T_k$  durch den P- $\Delta$ -Effekt.
- Die Druckkraft  $S$  wirkt steifigkeitsmindernd, während die Zugkraft versteifend wirkt.
- Es gilt die Beziehung:

$$\frac{2D'}{l^2} - \frac{S}{EI} = \frac{E'}{l^2}$$

- Theorie I. Ordnung:  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A' = 4, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B' = 2, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C' = 3, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D' = 6$$

# Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix



Um den Einfluss der Stablängskraft  $S$  auf einfache Weise zu analysieren, wird die Steifigkeitsmatrix aufgespalten:

$$\mathbf{k}_{II} = \mathbf{k}_I + \mathbf{k}_g$$

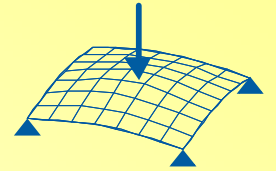
$\mathbf{k}_I$ : Elastische Steifigkeitsmatrix, Steifigkeitsmatrix nach Th. I. Ordnung

$\mathbf{k}_g$ : Geometrische Steifigkeitsmatrix

Die obige Aufspaltung wird ermöglicht durch die folgenden Reihenentwicklungen für klein  $\varepsilon$ :

$$A' = 4 - \frac{2}{15} \varepsilon^2, \quad B' = 2 + \frac{1}{30} \varepsilon^2, \quad C' = 3 - \frac{1}{5} \varepsilon^2,$$
$$D' = 6 - \frac{1}{10} \varepsilon^2, \quad E' = 12 - \frac{6}{5} \varepsilon^2$$

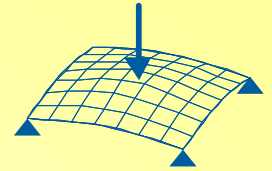
# Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix



Die obigen Reihenentwicklungen liefern eine gute Näherung für  $\varepsilon \leq 2,5!$

Einsetzen der obigen Reihenentwicklungen in die exakte Steifigkeitsmatrix liefert die elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_I$  und die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_g$ .

# Genäherte Steifigkeitsmatrix für Grundelement



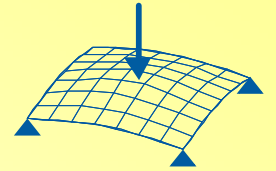
Bedingung:  $\varepsilon \leq 2,5$

$$\mathbf{k}_{II} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{EA}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & -\frac{6}{l} & 4 & 0 & \frac{6}{l} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \pm \frac{S}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}$$

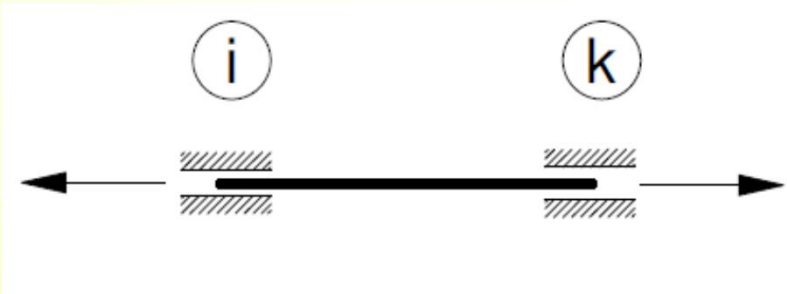
Elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_I$

Geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_g$

# Randmomente



## Grundelement

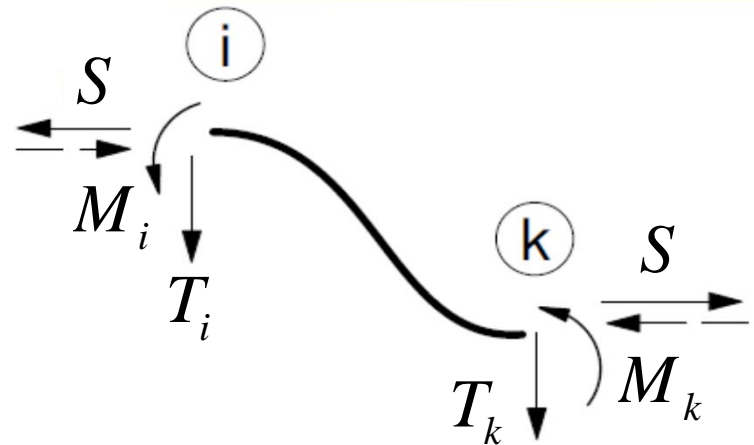
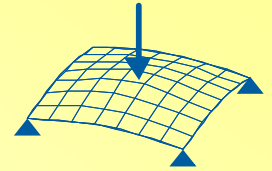


$$M_i = \frac{EI}{l} \left[ A' \varphi_i + B' \varphi_k + D' \frac{w_k - w_i}{l} \right]$$
$$M_k = \frac{EI}{l} \left[ B' \varphi_i + A' \varphi_k + D' \frac{w_k - w_i}{l} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\psi}$

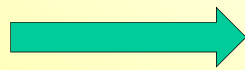


# Transversalkräfte

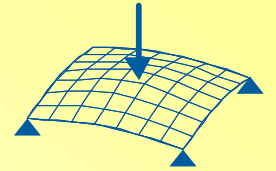


$$T_i = -\frac{M_i + M_k}{l} - S \cdot \frac{w_k - w_i}{l}$$

$$T_k = \frac{M_i + M_k}{l} + S \cdot \frac{w_k - w_i}{l}$$

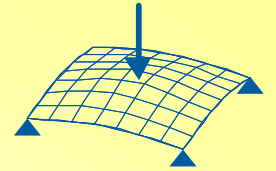


$$T_i = -T_k = -\frac{M_i + M_k}{l} \overset{\text{Zug}}{\mp} |S| \cdot \frac{w_k - w_i}{l} \underset{\text{Druck}}{\mp}$$



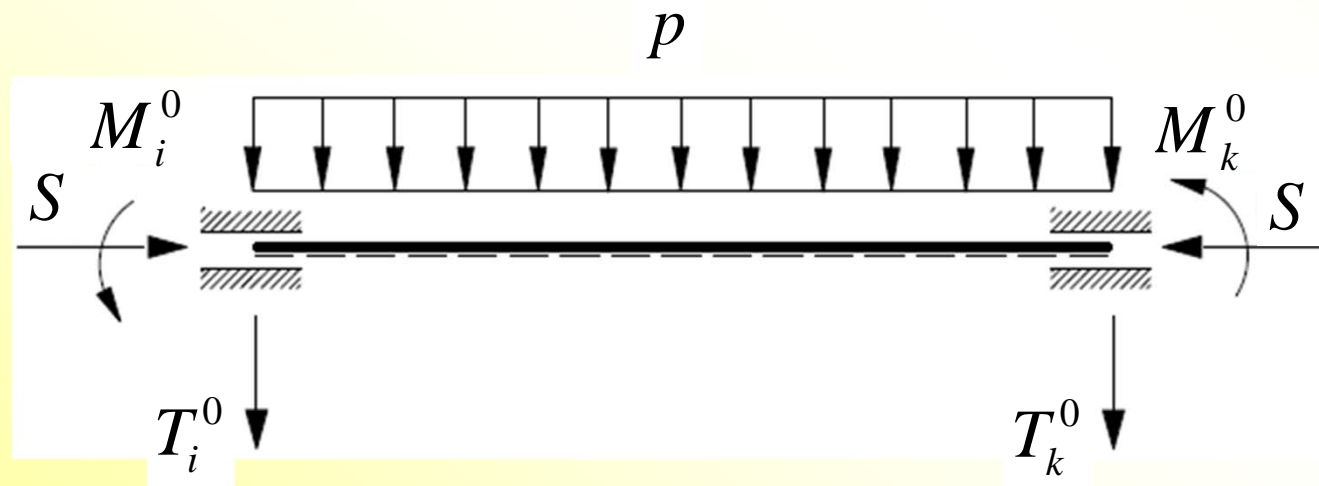
## 2.3.2 Lastvektor

# Lastvektor



Der Lastvektor enthält die Stabendschnittgrößen (Randschnittgrößen) infolge einer vorgegebenen Elementbelastung. Die Stabendschnittgrößen sind für einen geometrisch bestimmten Zustand bei einer vorgegebenen Elementbelastung zu bestimmen.

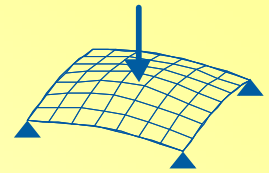
**Beispiel:** Grundelement unter einer konstanten Streckenlast



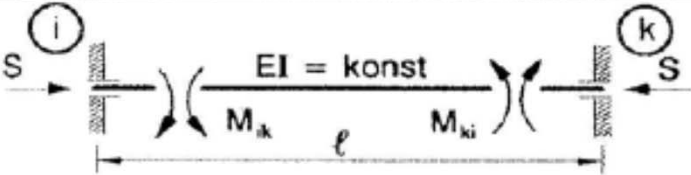
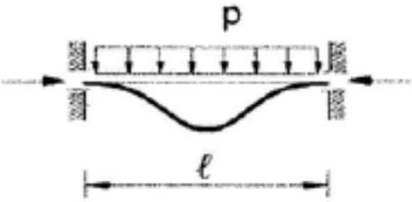
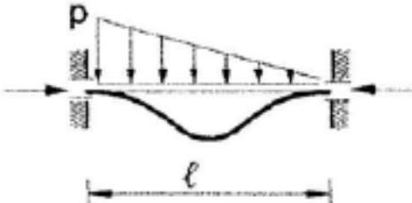
Lastvektor

$$\vec{s}^0 = \begin{pmatrix} T_i^0 \\ M_i^0 \\ T_k^0 \\ M_k^0 \end{pmatrix}$$

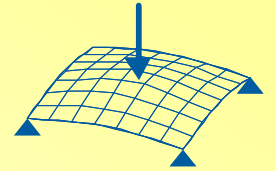
# Lastvektor



Stabkennzahl:  $\varepsilon = \alpha$

Lastfall	
	$M_{ik} = (A' - B') \cdot V' \frac{p\ell^2}{24}$
	$M_{ki} = - (A' - B') \cdot V' \frac{p\ell^2}{24}$
	$M_{ik} = \left[ \frac{1}{2}(A' - B') \cdot V' + 2 \frac{6 - D'}{\alpha^2} \right] \frac{p\ell^2}{24}$
	$M_{ki} = - \left[ \frac{1}{2}(A' - B') \cdot V' - 2 \frac{6 - D'}{\alpha^2} \right] \frac{p\ell^2}{24}$

# Lastvektor

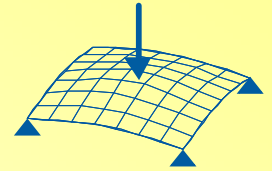


Exakt:

$$\vec{s}^0 = \begin{pmatrix} T_i^0 \\ M_i^0 \\ T_k^0 \\ M_k^0 \end{pmatrix} = -\frac{pl}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{l}{\varepsilon^2} \left( \varepsilon \cot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2 \right) \\ 1 \\ -\frac{l}{\varepsilon^2} \left( \varepsilon \cot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2 \right) \end{pmatrix}$$

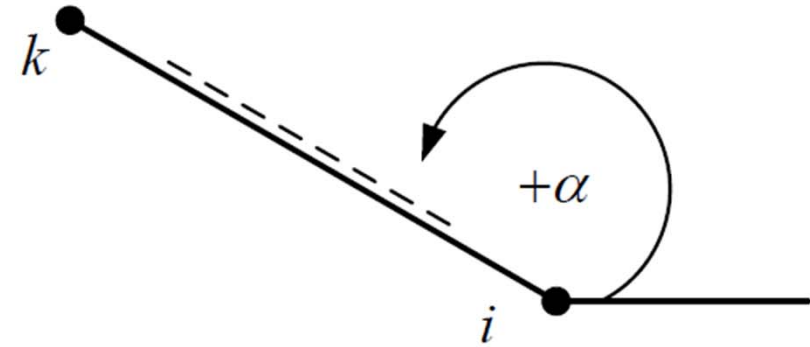
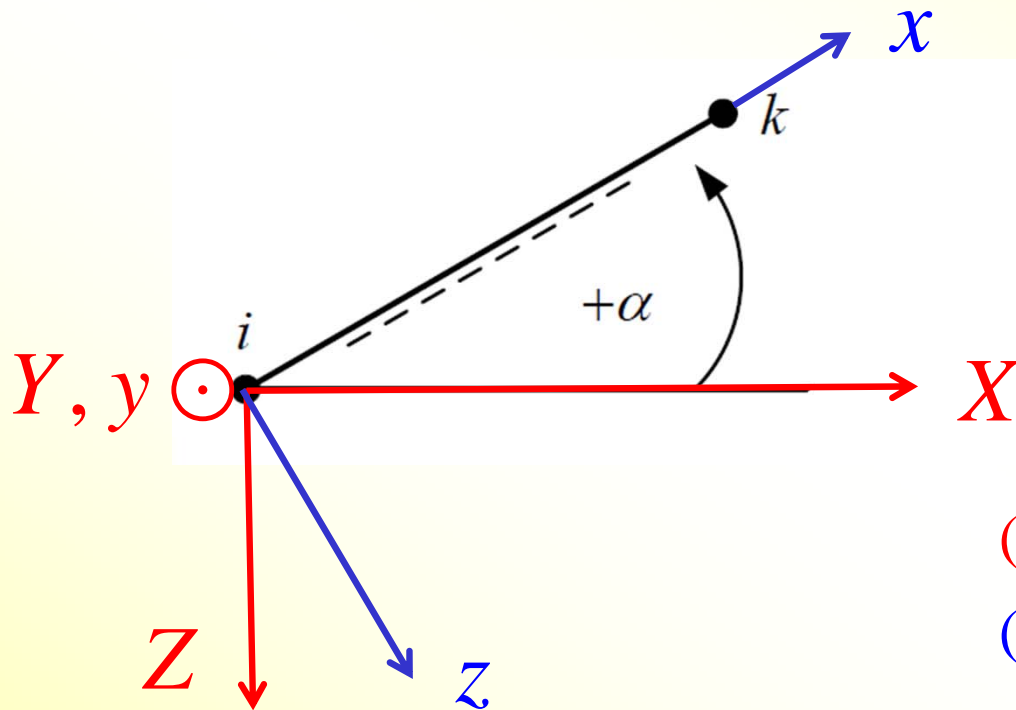
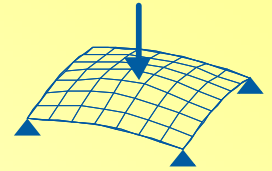
Angenähert:

$$\vec{s}^0 = \begin{pmatrix} T_i^0 \\ M_i^0 \\ T_k^0 \\ M_k^0 \end{pmatrix} = -\frac{pl}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \left( 1 + \frac{1}{60} \varepsilon^2 \right) \\ 1 \\ -\frac{l}{6} \left( 1 + \frac{1}{60} \varepsilon^2 \right) \end{pmatrix}$$



## 2.3.3 Koordinatentransformation

# Koordinatentransformation



$(X, Y, Z)$ : globales Koordinatensystem  
 $(x, y, z)$ : lokales Koordinatensystem

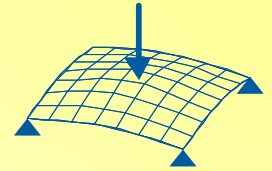
$$\begin{pmatrix} X \\ Z \\ Y \end{pmatrix}_G = \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}_L = \mathbf{t}^T \cdot \begin{pmatrix} X \\ Z \\ Y \end{pmatrix}_G$$

(Es gilt:  $\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{t}^T$  !)

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Transformationsmatrix**

# Koordinatentransformation



$$\mathbf{s}_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{s}_L; \quad \mathbf{s}_L = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{s}_G$$

$(\bullet)_G$  : globale Größe

$$\mathbf{d}_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}_L; \quad \mathbf{d}_L = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{d}_G$$

$(\bullet)_L$  : lokale Größe



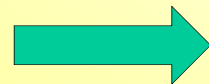
$$\mathbf{s}_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{s}_L$$

$$\mathbf{s}_L = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{d}_L$$

$$\mathbf{d}_L = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{d}_G$$

---

$$\mathbf{s}_G = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}^T}_{\mathbf{k}_G} \cdot \mathbf{d}_G = \mathbf{k}_G \cdot \mathbf{d}_G$$



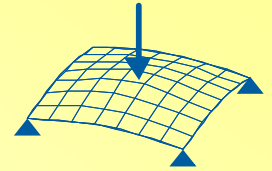
$$\mathbf{s}_G = \mathbf{k}_G \cdot \mathbf{d}_G$$

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{T} \cdot \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{T}^T$$

Globale Elementsteifigkeitsmatrix



# Koordinatentransformation



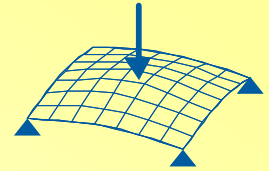
Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponierte Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^T$ :

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Globale Elementsteifigkeitsmatrix



$$\mathbf{k}_G = \begin{bmatrix}
 c^2 \cdot \frac{EA}{l} + s^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -cs \cdot \frac{EA}{l} + cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & -c^2 \cdot \frac{EA}{l} - s^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & cs \cdot \frac{EA}{l} - cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) \\
 -cs \cdot \frac{EA}{l} + cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & s^2 \cdot \frac{EA}{l} + c^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & cs \cdot \frac{EA}{l} - cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -s^2 \cdot \frac{EA}{l} - c^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) \\
 -s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & -c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & \frac{A' \cdot EI}{l} & s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & \frac{B' \cdot EI}{l} \\
 -c^2 \cdot \frac{EA}{l} - s^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & cs \cdot \frac{EA}{l} - cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & c^2 \cdot \frac{EA}{l} + s^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -cs \cdot \frac{EA}{l} + cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) \\
 cs \cdot \frac{EA}{l} - cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & -s^2 \cdot \frac{EA}{l} - c^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & -cs \cdot \frac{EA}{l} + cs \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & s^2 \cdot \frac{EA}{l} + c^2 \cdot \left( \frac{2D' \cdot EI}{l^3} \pm \frac{|S|}{l} \right) & c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) \\
 -s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & -c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & \frac{B' \cdot EI}{l} & s \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & c \cdot \left( \frac{D' \cdot EI}{l^2} \right) & \frac{A' \cdot EI}{l}
 \end{bmatrix}$$

$c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha$