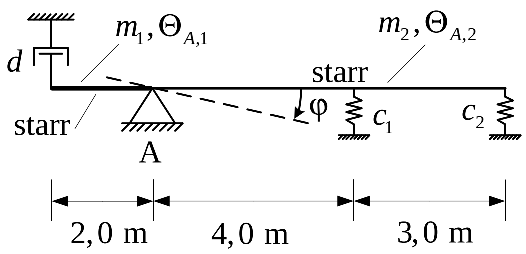
Aufgabe 1

Der nachfolgend dargestellte Einmassenschwinger soll untersucht werden. Das System besteht aus einem starren Balken mit den bereichsweise konstanten Massen m_1 bzw. m_2 sowie zwei Federn und einem viskosen Dämpfer.

Berechnen Sie

a.) die Eigenfrequenz des Systems für die Drehschwingung um den Punkt A und

b.) das Amplitudenverhältnis $\frac{x(t)}{x(t+t^*)}$ nach 5 Schwingungsperioden $\left(t^* = 5 \cdot T_d\right)$.



Gegeben:

$m_1 = 1200$ kg

$m_2 = 2100$ kg

$c_1 = 800$ kN/m

$c_2 = 600$ kN/m

Viskose Dämpfung:

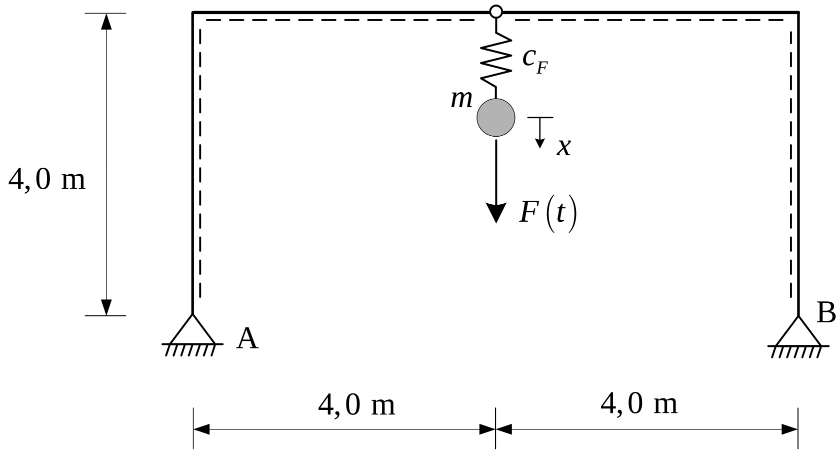
$d = 25$ kN·s/m

Hinweis:

Für die Berechnung des Massenträgheitsmoments kann der Balken näherungsweise als „dünner Stab“ angenommen werden.

Aufgabe 2

Gegeben ist der dargestellte Dreigelenkrahmen. In der Mitte des Riegels (Gelenk) hängt eine Feder (Federsteifigkeit c_F), an der wiederum eine Masse m hängt. Zu untersuchen sind die vertikalen Schwingungen dieser Einzelmasse.



Gegeben:

Alle Stäbe: $EI = 20000$ kNm^2; $EA = GA_S = \infty$.

Feder: $c_F = 1071{,}5$ kN/m .

Masse: $m = 5000$ kg

Alle Stäbe werden als masselos angenommen.

a.) Bestimmen Sie mithilfe eines Ersatzmodells die Federsteifigkeit $c*$ für das Gesamtsystem.

b.) Ermitteln Sie die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems.

Die Masse wird mit einer periodischen Kraft $F(t) = 50[\text{kN}] \cdot \cos(\Omega t)$ belastet.

c.) Geben Sie die Differentialgleichung des Ersatzmodells und seine allgemeine Lösung $x(t)$ an.

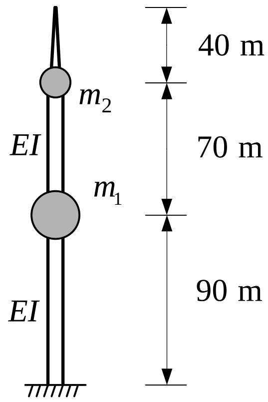
d.) Bestimmen Sie die Vergrößerungsfunktion V für die folgenden Werte der Erregerfrequenz:

$\Omega_1 = 4{,}0$ 1/s; $\Omega_2 = 6{,}0$ 1/s; $\Omega_3 = 8{,}0$ 1/s.

e.) Bestimmen Sie für die größte Vergrößerungsfunktion V aus dem Aufgabenteil d.) die konkrete Lösung $x(t)$ des Systems für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

Aufgabe 3

Gegeben ist der nachfolgend dargestellte Fernsehturm, der zwei diskrete Massen m_1 und m_2 besitzt und als Zweimassenschwinger untersucht werden soll.



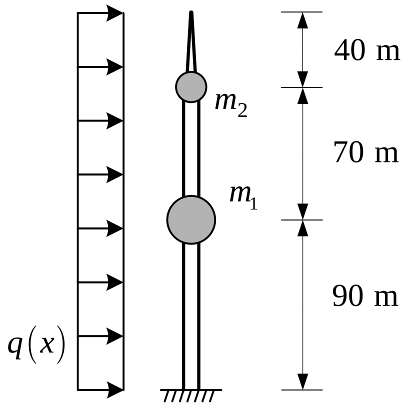
Gegeben:

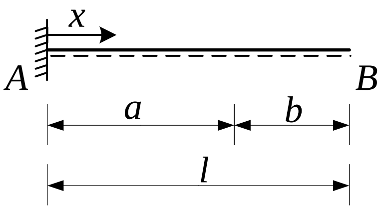
$EI = 1.000.000$ MNm²

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 \\ 0 & 3000 \end{bmatrix} \text{ [kg]}$$

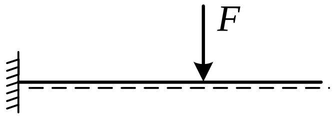
a.) Berechnen Sie die Flexibilitätsmatrix $\underline{\underline{\delta}}$ und die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ des Systems. Nutzen Sie für Ihre Berechnungen die auf der nächsten Seite angegebenen Formeln.

b.) Berechnen Sie die erste genäherte Eigenfrequenz des Systems mithilfe des Rayleigh-Verfahrens für diskrete Systeme. Verwenden Sie dabei für den ersten genäherten Eigenvektor $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ die statische Durchbiegung für eine konstante Streckenlast $q(x) = 1$ kN/m . Nutzen Sie dafür die auf der nächsten Seite angegebenen Formeln.





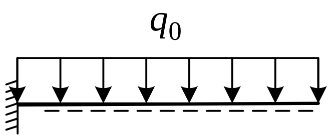
$$\alpha = \frac{a}{l}, \quad \beta = \frac{b}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$



$$EIw'_A = 0$$

$$EIw'_B = \frac{Fa^2}{2}$$

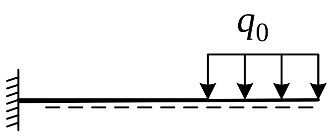
$$EIw(x) = \begin{cases} \dfrac{Fl^3}{6}\left(-\xi^3 + 3\alpha\xi^2\right) & \text{für } x \le a \\ \dfrac{Fl^3}{6}\left[-\xi^3 + 3\alpha\xi^2 + (\xi-\alpha)^3\right] & \text{für } x \ge a \end{cases}$$



$$EIw'_A = 0$$

$$EIw'_B = \frac{q_0 l^3}{6}$$

$$EIw(x) = \frac{q_0 l^4}{24}\left(\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2\right)$$



$$EIw'_A = 0$$

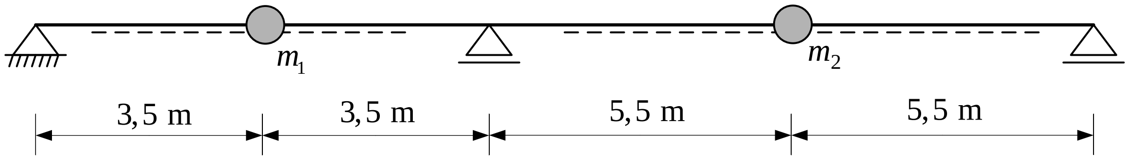
$$EIw'_B = \frac{q_0 l^3}{6}\left(\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta\right)$$

$$EIw(x) = \begin{cases} \dfrac{q_0 l^4}{24}\left[-4\beta\xi^3 + 6\beta(2-\beta)\xi^2\right] & \text{für } x \le a \\ \dfrac{q_0 l^4}{24}\left[-4\beta\xi^3 + 6\beta(2-\beta)\xi^2 + (\xi-\alpha)^4\right] & \text{für } x \ge a \end{cases}$$

Aufgabe 4

Der nachfolgend dargestellte Zweifeldträger wird als Zweimassenschwinger modelliert.

Gegeben:



Material- und Querschnittsdaten:

$EI = 40.000$ kNm²

Eigenfrequenzen und Eigenvektoren:

$\omega_1 = 17{,}946\ [1/\text{s}]$ $\qquad \omega_2 = 45{,}462\ [1/\text{s}]$

$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}25286 \\ 1{,}00000 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}16091 \end{pmatrix}$

Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix:

$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 0{,}20985 & 0{,}04451 \\ 0{,}04451 & 0{,}06439 \end{bmatrix} EI$

$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 4200 & 0 \\ 0 & 6600 \end{bmatrix}$ [kg]

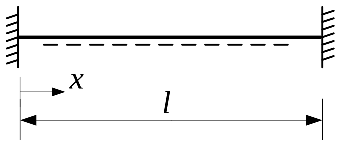
a.) Bestimmen Sie die massennormierten Eigenvektoren $\mathbf{A}_{1M}$ und $\mathbf{A}_{2M}$.

b.) Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{w}(t)$ der Bewegungsgleichungen für freie gedämpfte Schwingungen des Systems mit der Methode der Modal-Transformation.
Die modale Dämpfung beträgt für beide Eigenfrequenzen $D_1 = D_2 = 0{,}05$ und die Anfangsbedingungen lauten:

$$\mathbf{w}(0) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 6{,}0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}\ [\text{m}], \qquad \dot{\mathbf{w}}(0) = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-1}\ [\text{m/s}].$$

Aufgabe 5

Der dargestellte Biegebalken soll als ein kontinuierliches System untersucht werden.



Material- und Querschnittsdaten:

$EI = const.$

$\bar{m} = const.$

$EA = GA_S = \infty$

a.) Berechnen Sie analytisch die ersten zwei Eigenfrequenzen des Systems.

b.) Bestimmen Sie die erste genäherte Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_1$ des Systems mithilfe des Rayleigh-Verfahrens für kontinuierliche Systeme. Nutzen Sie dabei als Ansatzfunktion $\widetilde{W}_1(\xi)$ die folgende Funktion:

$$\widetilde{W}_1(\xi) = \xi^2 (1-\xi)^2 \qquad \text{mit} \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

und beachten Sie die Hinweise unten.
Vergleichen Sie die genäherte Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_1$ mit der exakten Eigenfrequenz $\omega_{1,\text{exakt}}$ aus a.) und machen Sie eine Aussage darüber.

c.) Stellen Sie mithilfe des Weggrößenverfahrens (bzw. Finite-Elemente-Methode) mit zwei Balkenelementen der gleichen Länge die reduzierte Steifigkeitsmatrix sowie die reduzierte Massenmatrix auf. Berechnen Sie ebenfalls die ersten zwei Eigenfrequenzen des Systems mit diesem Verfahren.
Vergleichen Sie die Eigenfrequenzen aus diesem Verfahren mit den exakten Ergebnissen aus a.) und machen Sie eine Aussage darüber.

Hinweise:

Beachten Sie die Integrationsgrenzen $\xi \in [0,1]$ und

$$\left[\widetilde{W}_1(\xi)''\right]^2 = \frac{1}{l^4}\left(144\cdot\xi^4 - 288\cdot\xi^3 + 192\cdot\xi^2 - 48\cdot\xi + 4\right),$$

$$\left[\widetilde{W}_1(\xi)\right]^2 = \xi^8 - 4\cdot\xi^7 + 6\cdot\xi^6 - 4\cdot\xi^5 + \xi^4.$$