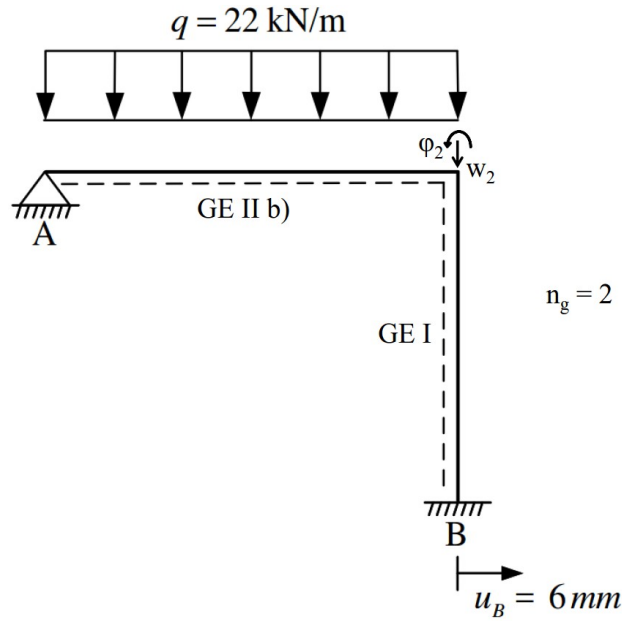


Baustatik II

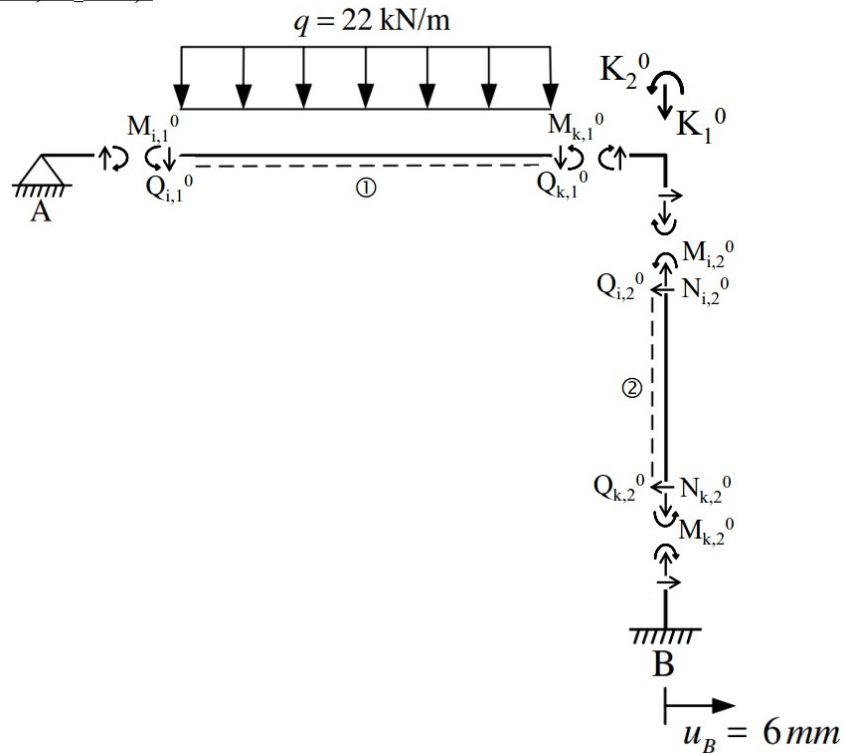
Musterlösung Probeklausur 1

Aufgabe 1: Weggrößenverfahren

a) Biegemomentenverlauf über die Knotengleichgewichtsbedingungen



Nullzustand ($\varphi_2 = 0, w_2 = 0$):



Stab 1:

$$M_{i,1}^0 = 0$$

$$M_{k,1}^0 = \frac{-q \cdot l_1^2}{8} = -68,75 \text{ kNm}$$

$$Q_{i,1}^0 = -\frac{3}{8} \cdot q \cdot l_1 = -41,25 \text{ kN}$$

$$Q_{k,1}^0 = -\frac{5}{8} \cdot q \cdot l_1 = -68,75 \text{ kN}$$

Stab 2:

$$M_{i,2}^0 = \frac{6 \cdot EI_2}{l_2^2} \cdot w_k = -31,5 \text{ kNm}$$

$$M_{k,2}^0 = \frac{6 \cdot EI_2}{l_2^2} \cdot w_k = -31,5 \text{ kNm}$$

$$Q_{i,2}^0 = -\frac{12 \cdot EI_2}{l_2^3} \cdot w_k = 15,75 \text{ kN}$$

$$Q_{k,2}^0 = \frac{12 \cdot EI_2}{l_2^3} \cdot w_k = -15,75 \text{ kN}$$

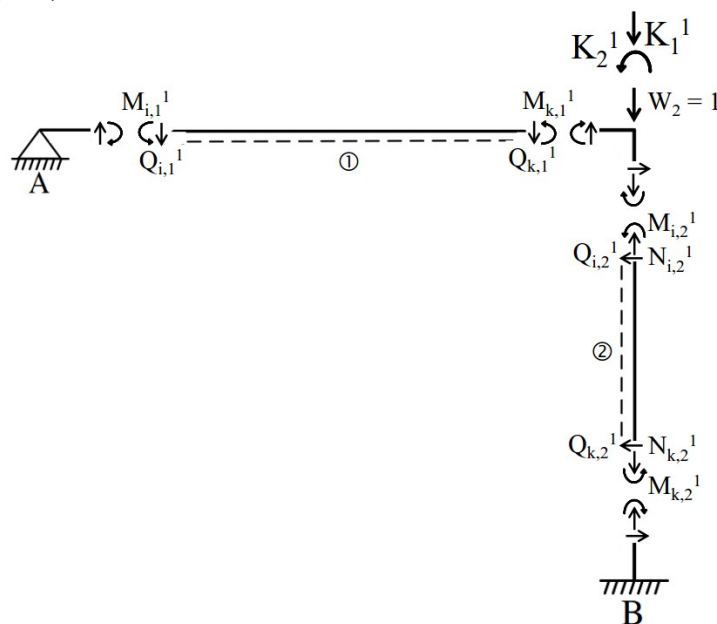
$$N_{i,2}^0 = 0$$

$$N_{k,2}^0 = 0$$

Knotengleichgewicht:

$$\sum M^0 = 0: K_2^0 - (-68,75) - (-31,5) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2^0 = -100,25 \text{ kNm}$$

$$\sum Q^0 = 0: K_1^0 - (-68,75) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1^0 = -68,75 \text{ kN}$$

Einheitszustand 1 ($w_2 = 1$):

Stab 1:

$$M_{i,1}^1 = 0$$

$$M_{k,1}^1 = \frac{3 \cdot EI_1}{l_1^2} \cdot w_2 = 0,12 EI_1$$

$$Q_{i,1}^1 = -\frac{3 \cdot EI_1}{l_1^3} \cdot w_2 = -0,024 \cdot EI_1$$

$$Q_{k,1}^1 = 0,024 \cdot EI_1$$

Stab 2:

$$M_{i,2}^1 = 0$$

$$M_{k,2}^1 = 0$$

$$Q_{i,2}^1 = 0$$

$$Q_{k,2}^1 = 0$$

$$N_{i,2}^1 = \frac{EA_2}{l_2} \cdot w_2 = 0,25 \cdot EA_2$$

$$N_{k,2}^1 = -\frac{EA_2}{l_2} \cdot w_2 = -0,25 \cdot EA_2$$

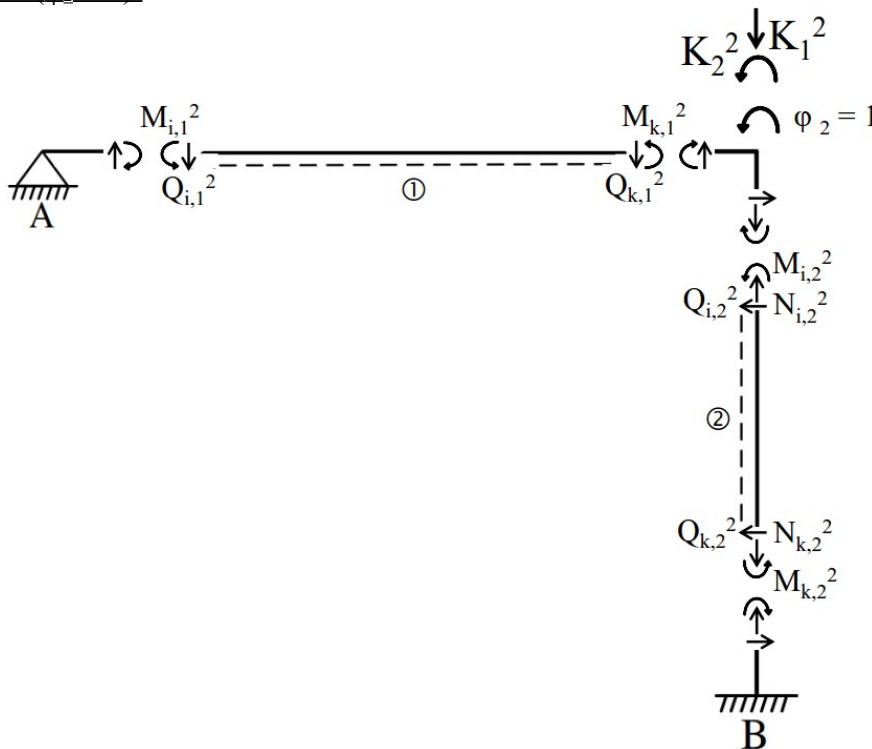
Knotengleichgewicht:

$$\frac{EA_2}{EI_1} = 9,09$$

$$\sum Q^1 = 0: K_1 - 0,024 \cdot EI_1 - 0,25 \cdot EA_2 = 0 \Rightarrow K_1 = 0,024 \cdot EI_1 + 0,25 \cdot 9,09 \cdot EI_1 = 2,297 \cdot EI_1$$

$$\sum M^1 = 0: K_2 - 0,12 \cdot EI_1 - 0 = 0 \Rightarrow K_2 = 0,12 \cdot EI_1$$

Einheitszustand 2 ($\varphi_2 = 1$):



Stab 1:

$$M_{i,1}^2 = 0$$

$$M_{k,1}^2 = \frac{3 \cdot EI_1}{l_1} \cdot \varphi_2 = 0,6 EI_1$$

$$Q_{i,1}^2 = -\frac{3 \cdot EI_1}{l_1^2} \cdot \varphi_2 = -0,12 \cdot EI_1$$

$$Q_{k,1}^2 = \frac{3 \cdot EI_1}{l_1^2} \cdot \varphi_2 = 0,12 \cdot EI_1$$

Stab 2:

$$M_{i,2}^2 = \frac{4 \cdot EI_2}{l_2} \cdot \varphi_2 = 1 \cdot EI_2$$

$$M_{k,2}^2 = \frac{2 \cdot EI_2}{l_2} \cdot \varphi_2 = 0,5 \cdot EI_2$$

$$Q_{i,2}^2 = -\frac{6 \cdot EI_2}{l_2^2} \cdot \varphi_2 = -0,375 \cdot EI_2$$

$$Q_{k,2}^2 = \frac{6 \cdot EI_2}{l_2^2} \cdot \varphi_2 = 0,375 \cdot EI_2$$

$$N_{i,2}^2 = 0$$

$$N_{k,2}^2 = 0$$

Knotengleichgewicht:

$$\sum Q^2 = 0: K_1^2 - 0,12 \cdot EI_1 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow K_1^2 = 0,12 \cdot EI_1$$

$$\sum M^2 = 0: K_2^2 - 0,6 \cdot EI_1 - EI_2 = 0$$

$$\Rightarrow K_2^2 = 0,6 \cdot EI_1 + \frac{EI_2}{EI_1} \cdot EI_1 = 1,236 \cdot EI_1$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$EI_1 \cdot \begin{bmatrix} 2,297 & 0,12 \\ 0,12 & 1,236 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68,75 \\ 100,25 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = 2,297 EI_1 \cdot 1,236 EI_1 - 0,12^2 EI_1^2 = 2,825 \cdot EI_1^2$$

$$D_1 = 68,75 \cdot 1,236 EI_1 - 0,12 EI_1 \cdot 100,25 = 72,945 \cdot EI_1$$

$$D_2 = 2,297 EI_1 \cdot 100,25 - 68,75 \cdot 0,12 EI_1 = 222,024 \cdot EI_1$$

$$w_2 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{72,945}{2,825 EI_1} = \frac{25,82}{EI_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{222,024}{2,825 EI_1} = \frac{78,59}{EI_1}$$

Superposition: $M_{end} = M^0 + w_2 \cdot M^1 + \varphi_2 \cdot M^2$

Stab 1:

$$M_{i,1} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{k,1} = -68,75 + 0,12 \cdot EI_1 \cdot \frac{25,82}{EI_1} + 0,6 \cdot EI_1 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = -18,5 \text{ kNm}$$

$$Q_{i,1} = -41,25 - 0,024 \cdot EI_1 \cdot \frac{25,82}{EI_1} - 0,12 \cdot EI_1 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = -51,3 \text{ kN} \Rightarrow 51,3 \text{ kN}$$

$$Q_{k,1} = -68,75 + 0,024 \cdot EI_1 \cdot \frac{25,82}{EI_1} + 0,12 \cdot EI_1 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = -58,7 \text{ kN}$$

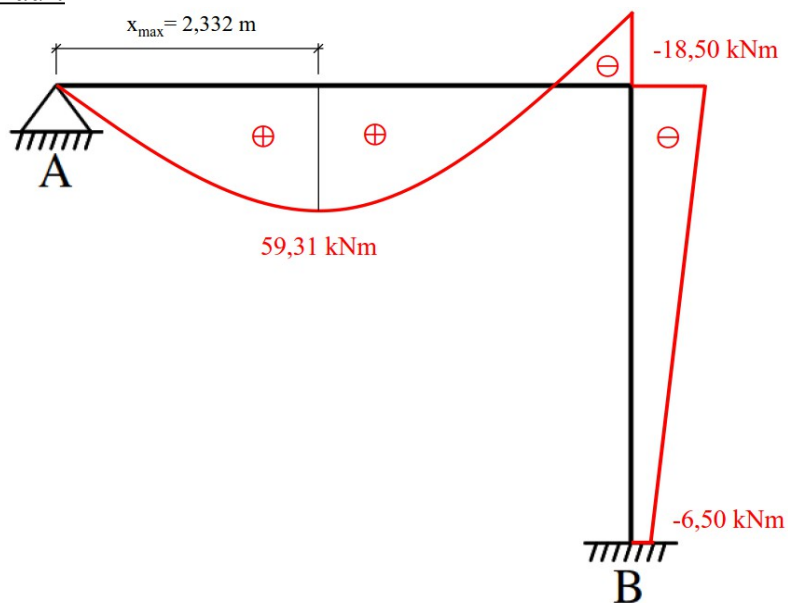
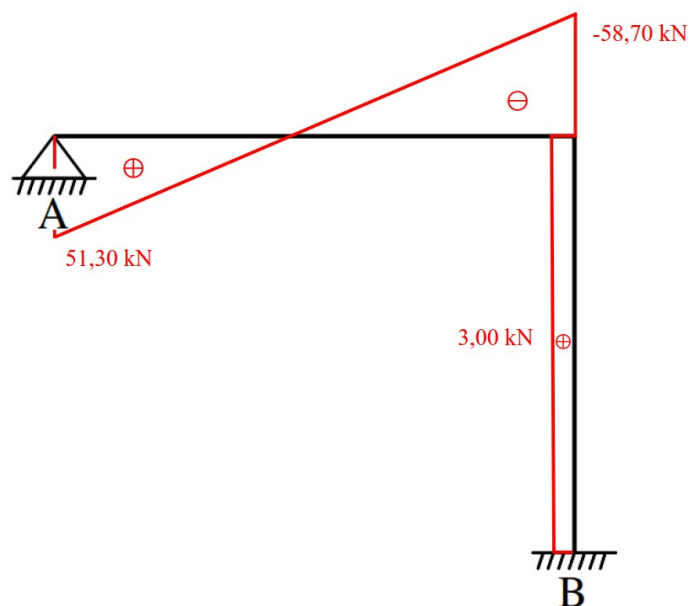
Stab 2:

$$M_{i,2} = M_{k,1} = -18,5 \text{ kNm} \text{ (biegesteife Ecke)}$$

$$M_{k,2} = -31,5 + 0 + 0,5 \cdot EI_2 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = -6,5 \text{ kNm}$$

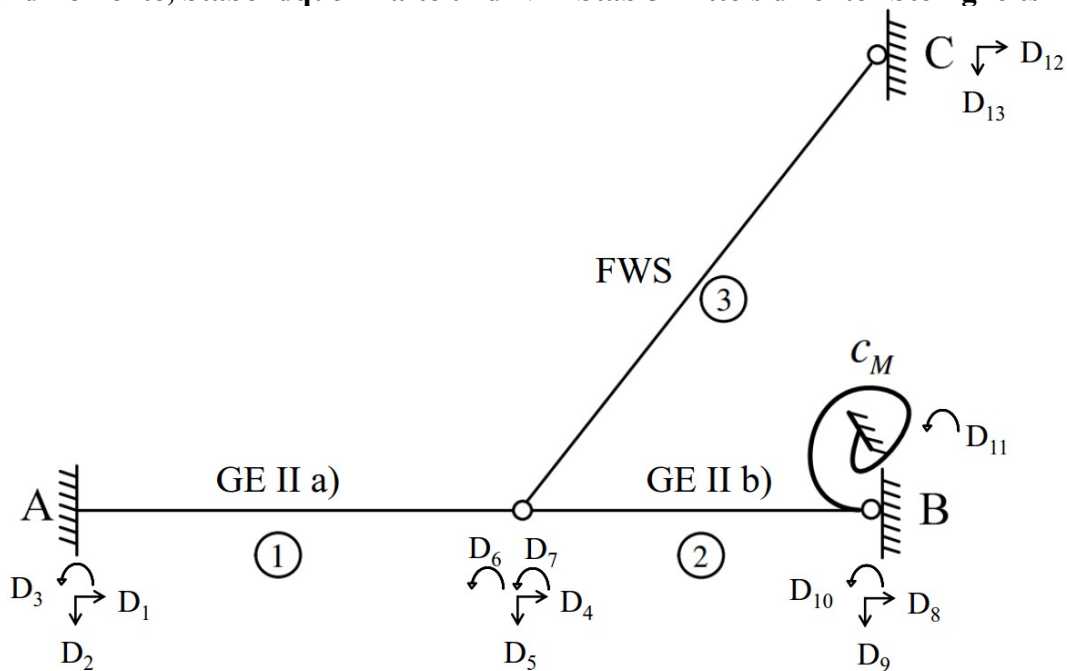
$$Q_{i,2} = 15,75 + 0 - 0,375 \cdot EI_2 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = -3 \text{ kN} \Rightarrow 3 \text{ kN}$$

$$Q_{k,2} = -15,75 + 0 + 0,375 \cdot EI_2 \cdot \frac{78,59}{EI_1} = 3 \text{ kN}$$

Biegemomentenverlauf:b) Querkraftverlauf

Aufgabe 2: Weggrößenverfahren

a) Stabendmomente, Stabendquerkräfte und N in Stab 3 mittels direkter Steifigkeitsmethode



Inzidenztabelle:

El.\D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
[1]	1	2	3	4	5	6							
[2]				1	2		3	4	5	6			
[3]				1	2							3	4
[cM]										1	2		
Di	0	0	0	0	D5	D6	D7	0	0	D10	0	0	0

$\Rightarrow D_{\text{red}} = [D_5 \ D_6]$ 2-fach geometrisch unbestimmt

Stabendkraftgrößen:

Stab 1:

$N_i = 0 \text{ kN}$

$N_k = 0 \text{ kN}$

$Q_i = -\frac{5}{8} \cdot q \cdot l_1 = -62,5 \text{ kN}$

$Q_k = -\frac{3}{8} \cdot q \cdot l_1 = -37,5 \text{ kN}$

$M_i = \frac{q \cdot l_1^2}{8} = 50 \text{ kNm}$

$M_k = 0 \text{ kNm}$

$\Rightarrow \vec{s}_0^{[1]} = [0 \ -62,5 \ 50 \ 0 \ -37,5 \ 0]$

Stab 2:

$$N_i = 0 \text{ kN}$$

$$N_k = 0 \text{ kN}$$

$$Q_i = \frac{3}{2} \cdot \frac{EI_2}{l_2} \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = 15 \text{ kN}$$

$$Q_k = -\frac{3}{2} \cdot \frac{EI_2}{l_2} \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = -15 \text{ kN}$$

$$M_i = 0 \text{ kNm}$$

$$M_k = -\frac{3}{2} \cdot EI_2 \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = -45 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \vec{s}_0^{[2]} = [0 \ 15 \ 0 \ 0 \ -15 \ -45]$$

Stab 3:

$$\Rightarrow \vec{s}_0^{[3]} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Gesamtlastvektor:

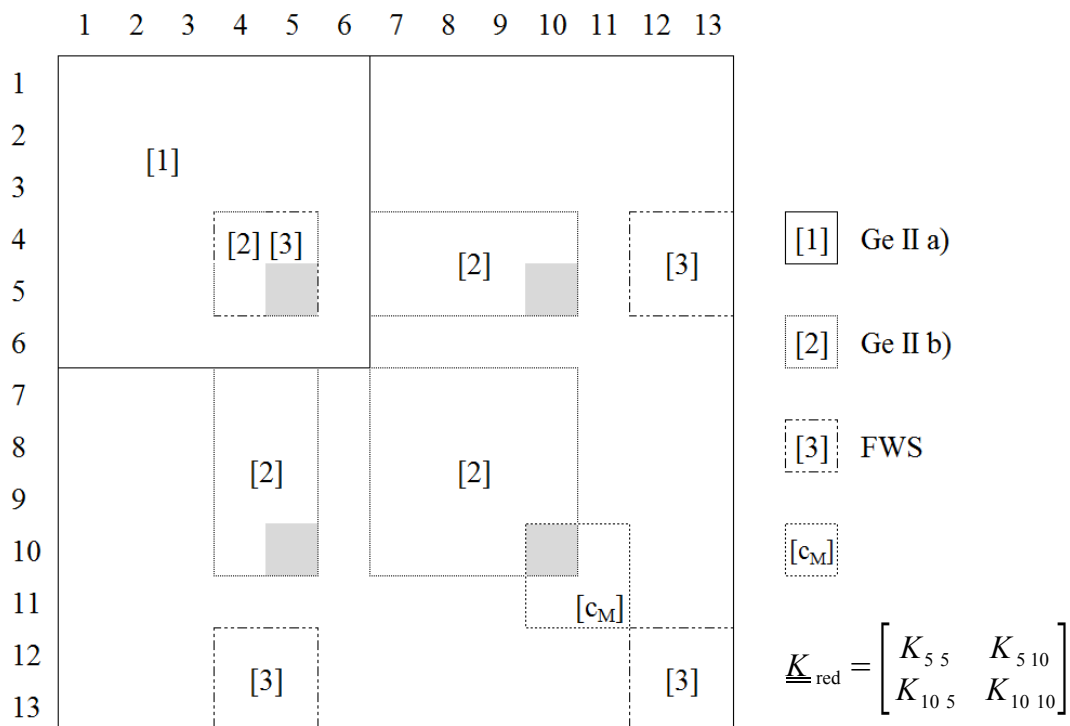
$$\vec{F}_E = [0 \ 62,5 \ -50 \ 0 \ 22,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 15 \ 45 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\vec{F}_K = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_E + \vec{F}_K = \vec{F}_E$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ges,red} = [22,5 \ 45]$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix:



$$EI_C = EI_1 = 20000 \text{ kN/m}^2 \quad \Rightarrow \quad EI_2 = 1,25 \cdot EI_C \quad c_M = 0,75 \cdot EI_C \quad EA = 10 \cdot EI_C$$

$$s_3 = \sin(\alpha) = 0,8$$

$$c_3 = \cos(\alpha) = 0,8$$

$$K_{5,5} = K_{5,5}^{[1]} + K_{2,2}^{[2]} + K_{2,2}^{[3]} = \frac{3 \cdot EI_1}{l_1^3} + \frac{3 \cdot EI_2}{l_2^3} + s_3^2 \cdot \frac{EA_3}{l_3} = 1,466 \cdot EI_C$$

$$K_{5,10} = K_{10,5} = K_{2,6}^{[2]} = -\frac{3 \cdot EI_2}{l_2^2} = -0,4167 \cdot EI_C$$

$$K_{10,10} = K_{6,6}^2 + K_{1,1}^{[c_M]} = \frac{3 \cdot EI_2}{l_2} + c_M = 2 \cdot EI_C$$

$$\Rightarrow \underline{K}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} 1,466 & -0,4167 \\ -0,4167 & 2 \end{bmatrix} \cdot EI_C$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\underline{K}_{\text{red}} \cdot \vec{D}_{\text{red}} = \vec{F}_{\text{red}}$$

$$EI_C \cdot \begin{bmatrix} 1,466 & -0,4167 \\ -0,4167 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_5 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,5 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_0 = 1,466 EI_C \cdot 2 EI_C - (-0,4167)^2 EI_C^2 = 2,758 \cdot EI_C^2$$

$$\tilde{D}_1 = 22,5 \cdot 2 EI_C - (-0,4167) EI_C \cdot 45 = 63,752 \cdot EI_C$$

$$\tilde{D}_2 = 1,466 EI_C \cdot 45 - 22,5 \cdot (-0,4167) EI_C = 75,346 \cdot EI_C$$

$$D_5 = \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_0} = \frac{63,75 \cdot EI_C}{2,758 \cdot EI_C^2} = \frac{23,115}{EI_C} \approx 1,156 \text{ mm}$$

$$D_{10} = \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}_0} = \frac{75,346 \cdot EI_C}{2,758 \cdot EI_C^2} = \frac{27,32}{EI_C} \approx 1,366 \text{ mrad}$$

Schnittgrößenbestimmung:

$$[1]: \vec{d}_{\text{lok}}^{[1]} = \vec{d}_{\text{gl}}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23,115}{EI_C} & \mathcal{D}_6 \end{bmatrix}$$

$$[2]: \vec{d}_{\text{lok}}^{[2]} = \vec{d}_{\text{gl}}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{23,115}{EI_C} & \mathcal{D}_7 & 0 & 0 & \frac{27,32}{EI_C} \end{bmatrix}$$

$$[3]: \vec{d}_{lok}^{[3]} = T_{FWS}^T \cdot \vec{d}_{gl}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 23,115/EI_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,49/EI_C \\ 13,87/EI_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{s} = \underline{\underline{K}}_{lok} \cdot \vec{d}_{lok} + \vec{s}_{0,lok}$$

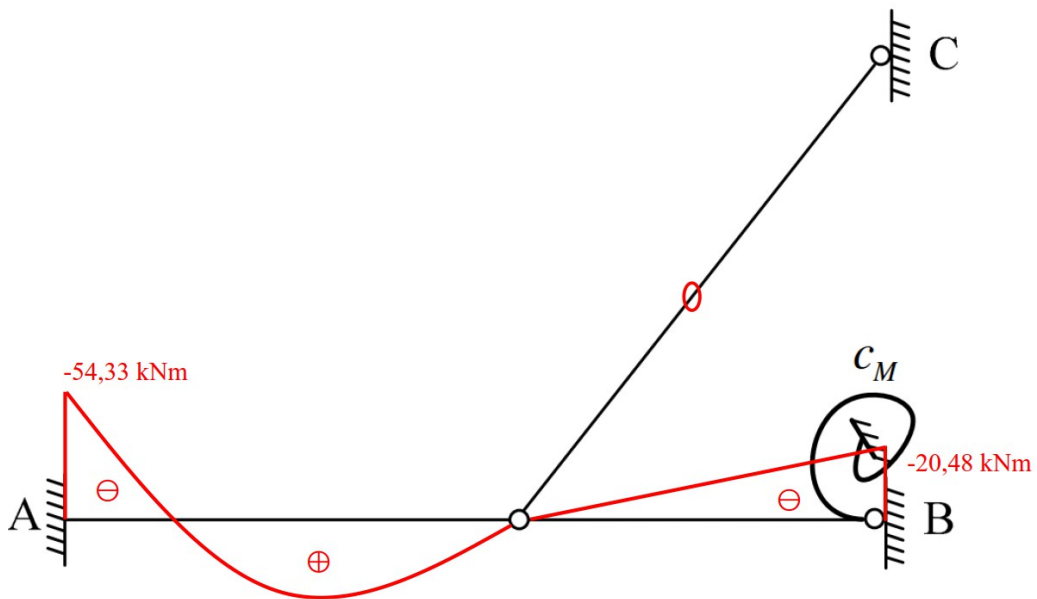
$$[1]: \vec{s}^{[1]} = \underline{\underline{K}}_{GEIIa} \cdot \vec{d}_{lok}^{[1]} + \vec{s}_{0,lok}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \cdot EI_C / l_1^3 \cdot 23,115 / EI_C \\ 3 \cdot EI_C / l_1^2 \cdot 23,115 / EI_C \\ 0 \\ 3 \cdot EI_C / l_1^3 \cdot 23,115 / EI_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -62,5 \\ 50 \\ 0 \\ -37,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -63,58 \\ 54,33 \\ 0 \\ -36,42 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 63,58 \\ -54,33 \\ 0 \\ -36,42 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[2]: \vec{s}^{[2]} = \underline{\underline{K}}_{GEIIb} \cdot \vec{d}_{lok}^{[2]} + \vec{s}_{0,lok}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \cdot EI_2 / l_2^3 \cdot 23,115 / EI_C - 3 \cdot EI_2 / l_2^2 \cdot 27,32 / EI_C \\ 0 \\ 0 \\ -3 \cdot EI_2 / l_2^3 \cdot 23,115 / EI_C + 3 \cdot EI_2 / l_2^2 \cdot 27,32 / EI_C \\ -3 \cdot EI_2 / l_2^2 \cdot 23,115 / EI_C + 3 \cdot EI_2 / l_2 \cdot 27,32 / EI_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ -45 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,83 \\ 0 \\ 0 \\ -6,83 \\ -20,48 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -6,83 \\ 0 \\ 0 \\ -6,83 \\ -20,48 \end{bmatrix}$$

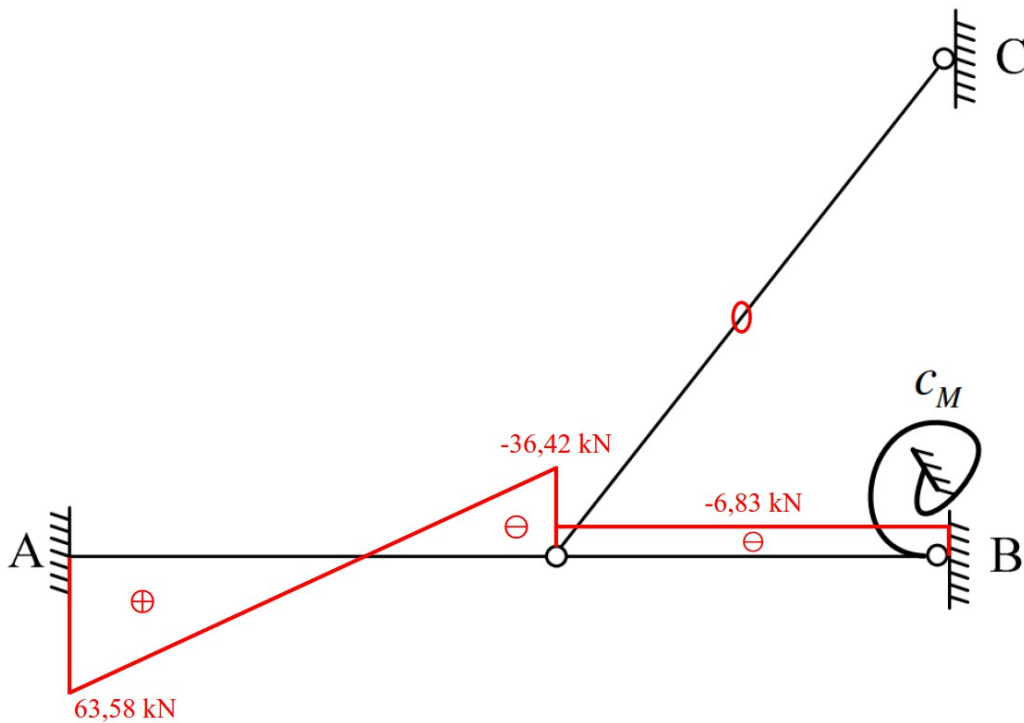
$$[3]: \vec{s}^{[3]} = \underline{\underline{K}}_{FWS} \cdot \vec{d}_{lok}^{[3]} + \vec{s}_{0,lok}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 \\ EA_3 / l_3 \cdot (-18,49) / EI_C \\ 0 \\ -EA_3 / l_3 \cdot (-18,49) / EI_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36,98 \\ 0 \\ 36,98 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 36,98 \\ 0 \\ 36,98 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Biegemomentenverlauf und Querkraftverlauf

Biegemomentenverlauf



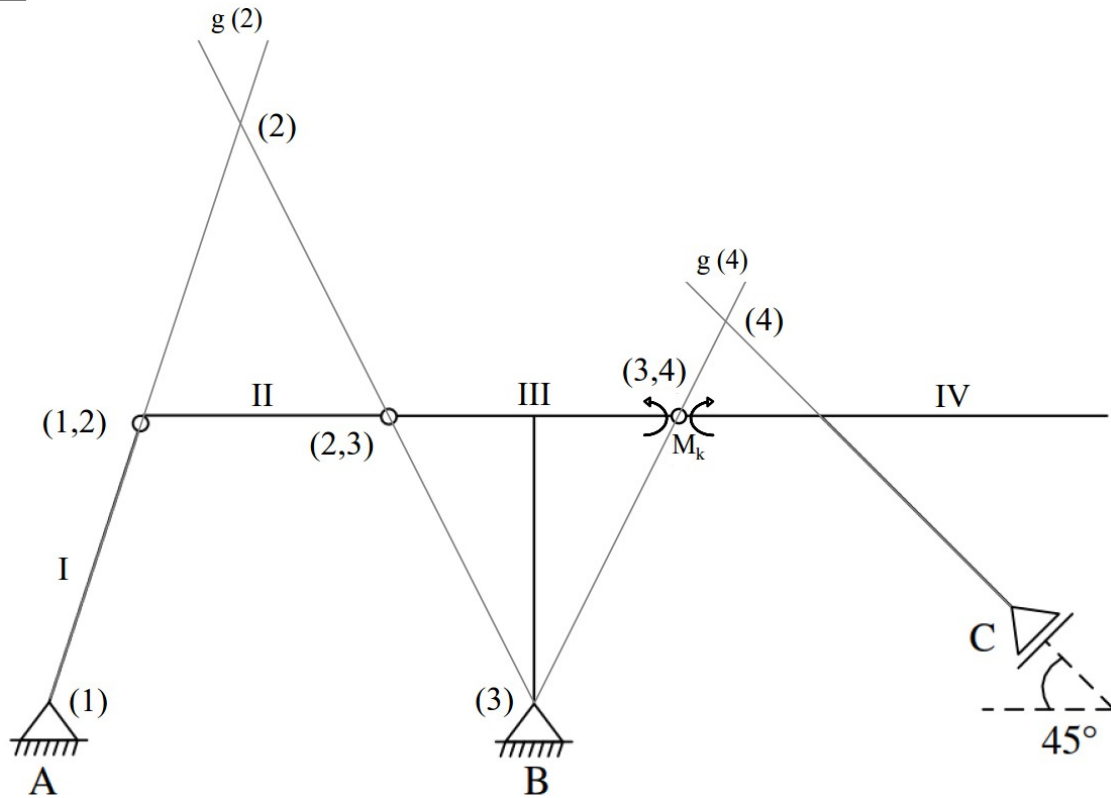
Querkraftverlauf



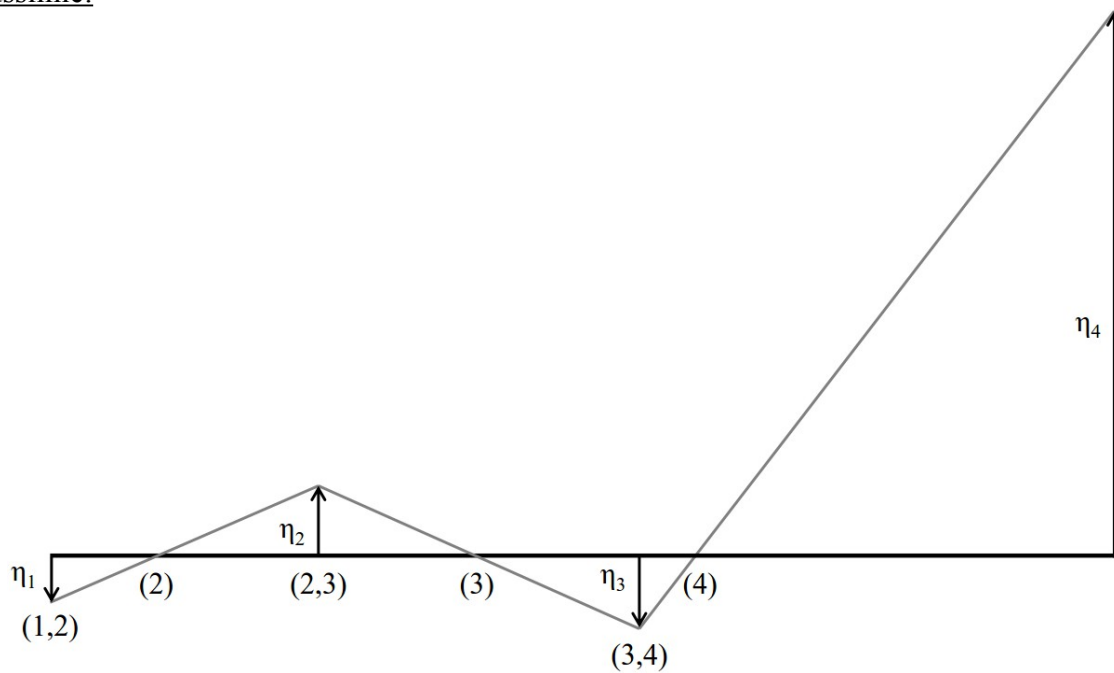
Aufgabe 3: Einflusslinien

a) EL- M_i

Polplan:



Einflusslinie:



$$\eta_3 = \frac{a \cdot b}{a+b} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{2} = 0,375$$

$$\eta_4 = -\frac{4 \cdot \eta_3}{0,5} = -3$$

$$\eta_2 = -\eta_3 = -0,375$$

$$\frac{\eta_1}{1} = -\frac{\eta_2}{1,5} \Rightarrow \eta_1 = \frac{0,375}{1,5} = 0,25$$

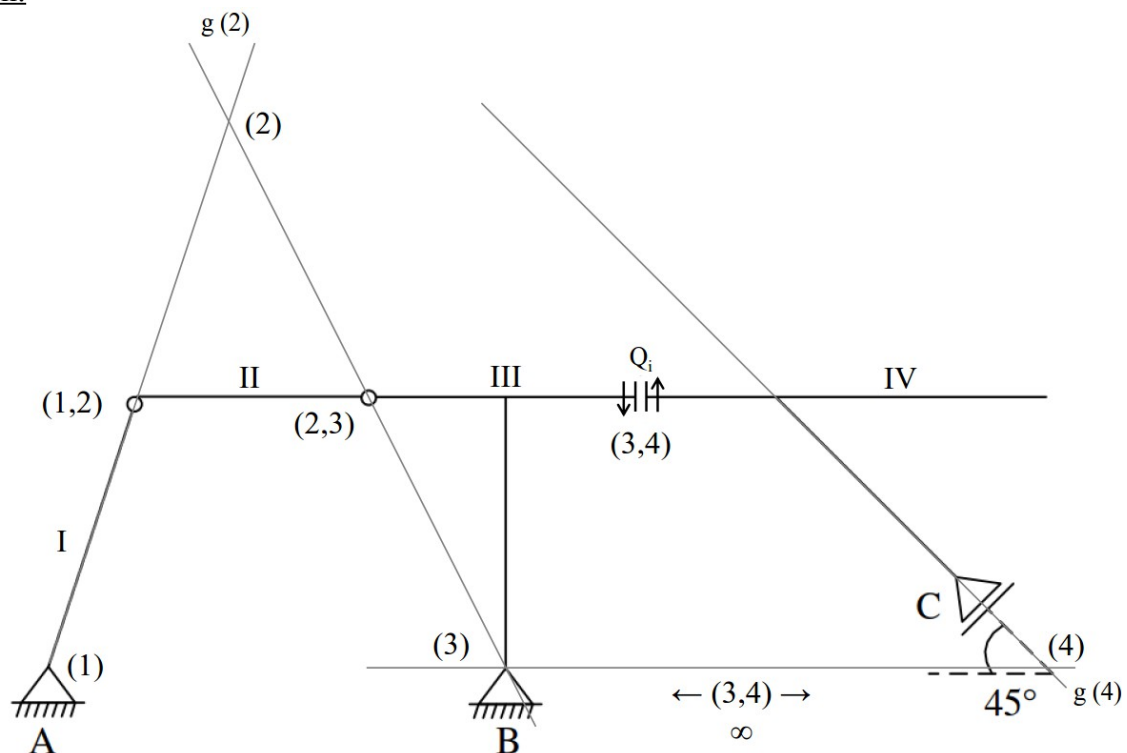
Auswertung:

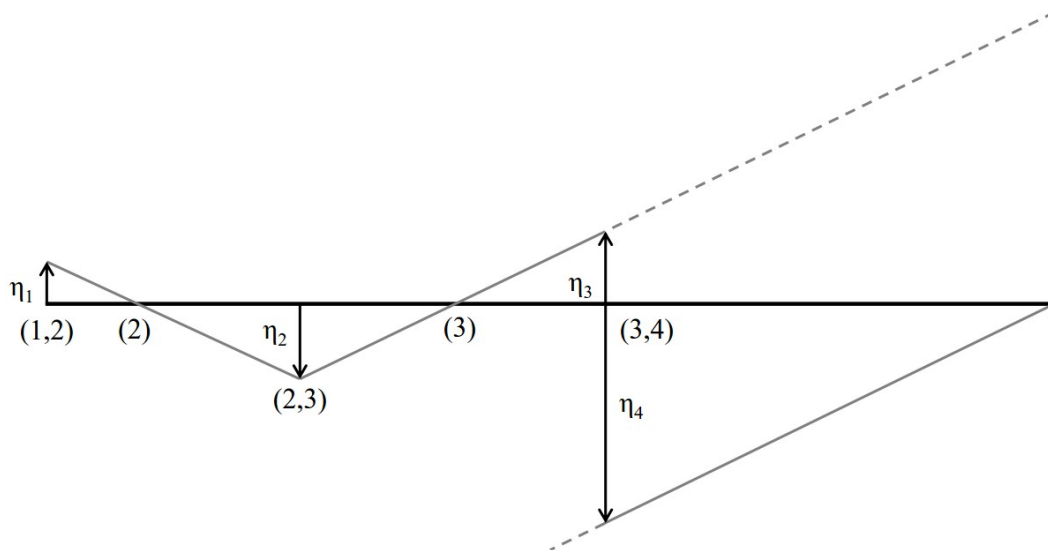
Streckenlast q:

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot q \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0,375) \cdot q \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot (-0,375) \cdot q \cdot 1,5 = -0,4375 \cdot q = -13,125 \text{ kNm}$$

Einzellast F:

$$M_i = \eta_4 \cdot F = -3 \cdot F = -150 \text{ kNm}$$

b) EL-Q_iPolplan:

Einflusslinie:

$$\frac{\eta_3}{1,5} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \eta_3 = -\frac{1,5}{6} = -0,25$$

$$\eta_4 = 1 - |\eta_3| = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$\eta_2 = -\eta_3 = 0,25$$

$$\eta_1 = -\frac{\eta_2}{1,5} = -\frac{1}{6}$$

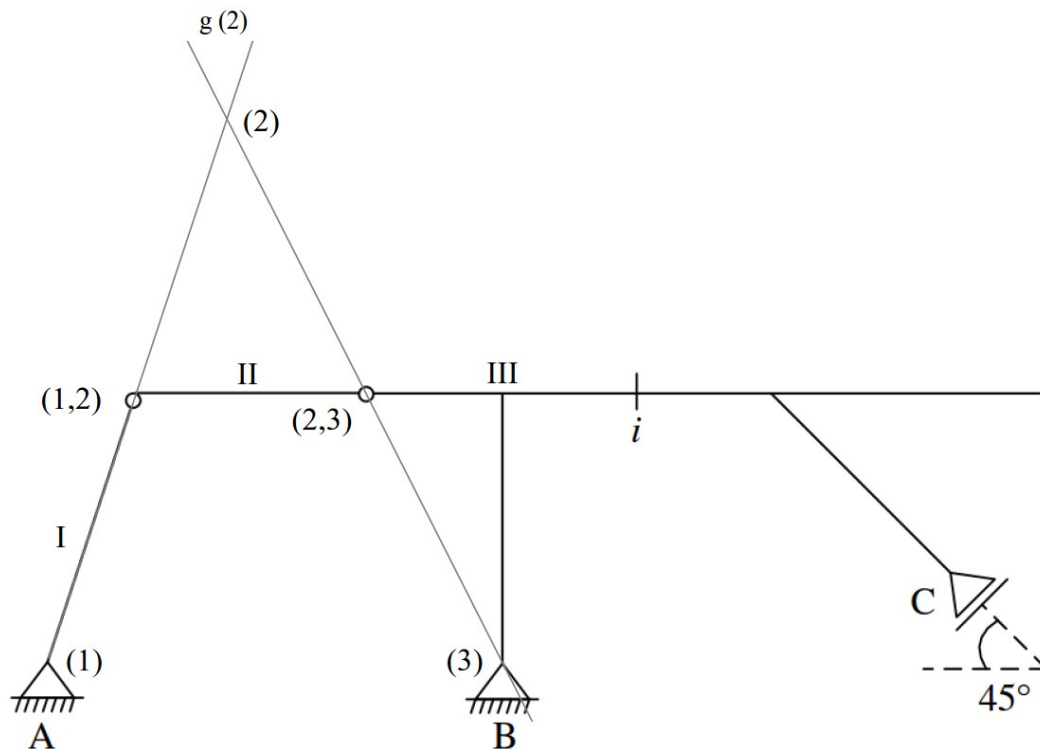
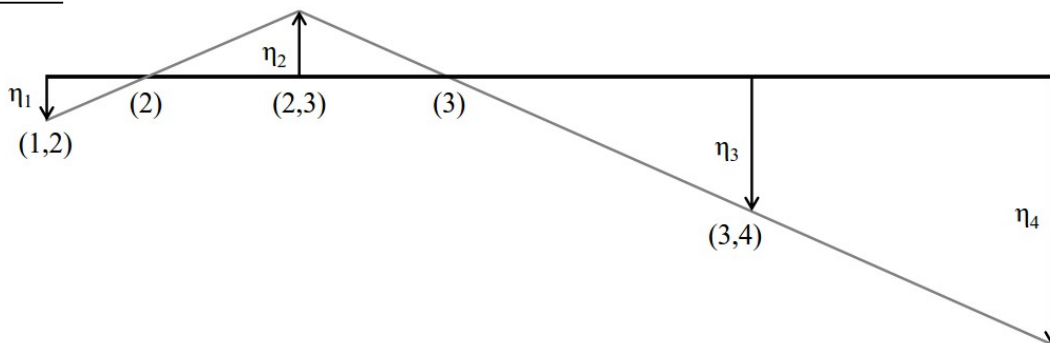
Auswertung:Streckenlast q :

$$Q_i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{6} \right) \cdot q \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot q \cdot 1,5 = 0,291\bar{6} \cdot q = 8,748 \text{ kN}$$

Einzellast F :

$$Q_i = 0 \text{ kN}$$

c) EL-C

Polplan:Einflusslinie:

$$\underline{\eta}_3 = 1$$

$$\frac{\underline{\eta}_4}{6} = \frac{\underline{\eta}_3}{3} \Rightarrow \underline{\eta}_4 = 2 \cdot \underline{\eta}_3 = 2$$

$$-\frac{\underline{\eta}_2}{1,5} = \frac{\underline{\eta}_3}{3} \Rightarrow \underline{\eta}_2 = \frac{\underline{\eta}_3 \cdot (-1,5)}{3} = -0,5$$

$$\underline{\eta}_1 = -\frac{\underline{\eta}_2}{1,5} = \frac{1}{3}$$

Normierung, da 45° Winkel:

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta_3 = \eta_3 \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta_4 = \sqrt{2}$$

$$\eta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{\frac{2}{2^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\eta_1 = -\frac{2}{3} \cdot \eta_2 = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

Auswertung:

Streckenlast q :

$$C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \right) \cdot q \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \right) \cdot q \cdot 1,5 = -0,412 \cdot q = -12,37 \text{ kN}$$

Einzellast F :

$$C = \eta_4 \cdot F = \sqrt{2} \cdot F = 70,71 \text{ kN}$$