

Stahlbau III - WS 2015 / 2016

5. Vorlesung / Übung

Daniel Pak

19.11.2015

Terminübersicht und Übungsinhalte

Termin	Thema	Inhalt
22.10.2015	Ermüdung von Kranbahnträgern	Ermüdungsnachweis nach EN 1993-1-9 Einführung Bemessung von Kranbahnträgern
29.10.2015	Ermüdung von Kranbahnträgern	Bemessung von Kranbahnträgern Ermüdungsnachweis für Kranbahnträger
05.11.2015	Fließgelenkverfahren	Einführung
12.11.2015	Fließgelenkverfahren	M-N-V-Interaktion
19.11.2015	Fließgelenkverfahren	Abhängigkeit von Lasten
03.12.2015	Fließgelenkverfahren	Theorie II. Ordnung
07.01.2016	Beulen	Stabilitätsfall Beulen 1
14.01.2016	Beulen	Stabilitätsfall Beulen 2
21.01.2016	Beulen	Stabilitätsfall Beulen 3
28.01.2016	Biegedrillknicken	Vertiefung Drehfederbettung / Kranbahnträger
11.02.2016	Ausweichtermin bzw. Fragen zur Klausur	

xx.xx.2016

schriftliche Prüfung

Änderungen vorbehalten!

Normen

Erhältlich als Download unter www.perinorm.com

- DIN EN 1993-1-1 - Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau

Weiterführende Literatur

- Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau,
Verlag Ernst und Sohn, Berlin/München/Düsseldorf
- Bode, H.: Stahlbau III
- Lindner, J.; Roik, K.: Einführung in die Berechnungsverfahren nach dem Traglastverfahren, Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln 1979
- Petersen, C.: Stahlbau,
Vieweg Verlag, Braunschweig/München 1993

Elastizitätstheorie - Plastizitätstheorie

Gegenüberstellung wichtiger Randbedingungen

	Elastizitätstheorie	Plastizitätstheorie
Statik	Gleichgewicht erfüllt	Gleichgewicht erfüllt
Verformungsbedingungen	elastische Kontinuität (geometrische Verträglichkeit)	Fließgelenke, keine Kontinuität (plastische Verformung zugelassen)
Vorgaben	geometrische und stat. Rand- und Übergangsbedingungen	Fließgelenke → stat. Randbedingungen ($M = M_{pl}$)
Grenzzustand	elast. Biegelinie bis zum Erreichen von M_{max} im max. beanspruchten Querschnitt	kinematische Kette → Systemversagen
Berechnung	Systembeanspruchung	Traglast (= Last bis zum Erreichen des Versagenszustandes)
Nachweis	max. Beanspruchung \leq zul. Beanspruchung	Einwirkung \leq Traglast

Fließgelenktheorie I. Ordnung

Voraussetzungen für die Anwendung

1. linearelastisch - idealplastische s-e-Beziehung, M- ϕ -Beziehung
2. ausreichende Rotationskapazität \rightarrow QKL 1 (oder Nachweis der Rotationskapazität)
3. alle Stabilitätskriterien müssen erfüllt sein, d.h. das System muss sicher sein gegen Biegeknicken, Biegedrillknicken und Beulen

Grenzen der Anwendung

- evtl. zu große Durchbiegungen unter Gebrauchslasten (GZG)
- Dauerfestigkeit bei dynamischer Beanspruchung ist zu beachten
- ungeeignetes System

Vorteile der Anwendung

- wirklichkeitsgetreue Erfassung der Tragsicherheit
- wirtschaftliche Bemessung

Hinweise zu dieser Art der plastischen Bemessung sind auch in der Norm zu finden

Fließgelenktheorie I. Ordnung - Traglastsätze

Kirchhoffscher Einzigkeitssatz

Nach dem Kirchhoffschen Einzigkeitssatz müssen die folgenden vier Forderungen eingehalten sein:

1. Statik: das Gleichgewicht ist erfüllt



statisch zulässig

2. Werkstoff: an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$



sicher

3. Kinematik: eine kinematische Kette ist im System (oder -teilen) erreicht

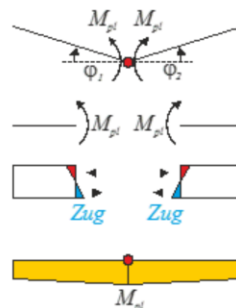


mit kinematischer Kette

4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$)

Antragen der Momente M_{pl} als innere oder äußere Momente, hier: als äußere Momente, dann:

- 1) Moment (als äußeres Moment)
wird als „rückdrehend“ angetragen, d.h. entgegen der Verdrehung φ
 $W_i = -M_{pl} \varphi$
- 2) die Momenten-Pfeilspitzen befinden sich auf der gedrückten Seite
- 3) die Momentenlinie wird auf der Zugseite eingezeichnet



Hinweise zu dieser Art der plastischen Bemessung sind auch in der Norm zu finden

Fließgelenktheorie I. Ordnung - Traglastsätze

Kirchhoffscher Einzigkeitssatz

1. Statik: das Gleichgewicht ist erfüllt
2. Werkstoff: an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$
3. Kinematik: eine kinematische Kette ist im System (oder -teilen) erreicht
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_l$)

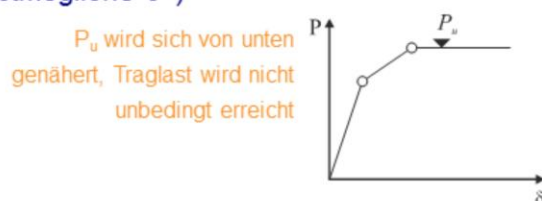
Statischer Grenzwertsatz:

Existiert für ein Tragwerk mit gegebener Lastgruppe \bar{P} eine Biegemomentenverteilung mit Gleichgewicht, so ist $\bar{P} \leq \bar{P}_u$ (Aufgabe: suche das größtmögliche \bar{P})

(Annäherung von unten, obere Schranke)

→ 1. + 2. erfüllt, Verzicht auf 3. und 4.

→ unterer Grenzwert der Traglast, $\bar{P} \leq \bar{P}_u$



Der statische Grenzwertsatz ist sicher.

Der kinematische Grenzwertsatz ist unsicher. Er kann verwendet werden, wenn $P_{kin} = P_u$ gefunden wird. Dies wird gewährleistet, indem nach dem kleinsten P_u gesucht wird.

Fließgelenktheorie I. Ordnung - Traglastsätze

Kirchhoffscher Einzigkeitssatz

1. Statik: das Gleichgewicht ist erfüllt
2. Werkstoff: an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$
3. Kinematik: eine kinematische Kette ist im System (oder -teilen) erreicht
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$)

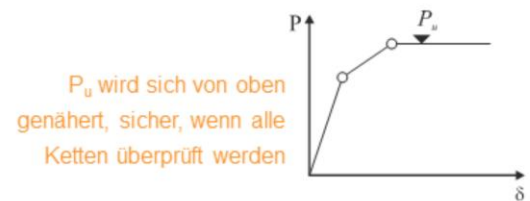
Kinematischer Grenzwertsatz:

Der Wert \bar{P}_i irgend einer kinematischen Kette (eines gegebenen Tragwerks) ist $\geq \bar{P}_u$

(Annäherung von oben, untere Schranke)

→ 1. + 3. + 4. erfüllt, Verzicht auf 2.

→ oberer Grenzwert für die Traglast, $\bar{P}_i \leq \bar{P}_u$



Der statische Grenzwertsatz ist sicher.

Der kinematische Grenzwertsatz ist unsicher. Er kann verwendet werden, wenn $P_{kin} = P_u$ gefunden wird. Dies wird gewährleistet, indem nach dem kleinsten P_u gesucht wird.

Fließgelenktheorie I. Ordnung - Traglastsätze

Kirchhoffscher Einzigkeitssatz

1. Statik: das Gleichgewicht ist erfüllt
2. Werkstoff: an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$
3. Kinematik: eine kinematische Kette ist im System (oder –teilen) erreicht
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$)

Vorgehensweise kinematische Methode (kinematischer Satz):

1. Annahme einer kinematisch zulässigen Fließgelenkkette (Bedingung 3.)
2. Bestimmung von P_{kin} mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung (PvV) (Bedingung 1. + 4.)
3. Überprüfen, ob Fließbedingung (2.) im gesamten Tragwerk erfüllt ist (dann: $P_{kin} = P_u$)
oder
Untersuchung aller möglicher Fließgelenkketten, Vergleich der Traglasten $P_u = \min\{P_{kin,i}\}$

Der statische Grenzwertsatz ist sicher.

Der kinematische Grenzwertsatz ist unsicher. Er kann verwendet werden, wenn $P_{kin} = P_u$ gefunden wird. Dies wird gewährleistet, indem nach dem kleinsten P_u gesucht wird.

Kinematischer Satz

Anzahl und Ort der Fließgelenke

Ist das System **n-fach** statisch unbestimmt, können sich in einer kinematischen Kette

$$f = n + 1$$

Fließgelenke bilden.

(Vorsicht: diese Gleichung ist nicht immer hinreichend. Bei lokalen Ketten können auch weniger Fließgelenke beteiligt sein).

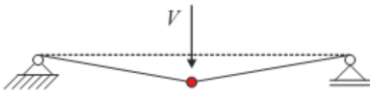
Fließgelenke können an Stellen **relativer Beanspruchungsmaxima** und **Widerstandsminima** auftreten, wie z.B.:

- unter Einzellasten
- im Bereich maximaler Beanspruchung durch Streckenlasten
- in Rahmenecken
- in Einspannungen
- Querschnittssprüngen

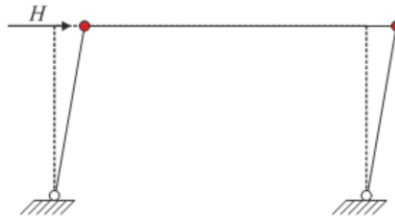
Kinematischer Satz

Elementarketten (unabhängige kinematische Ketten):

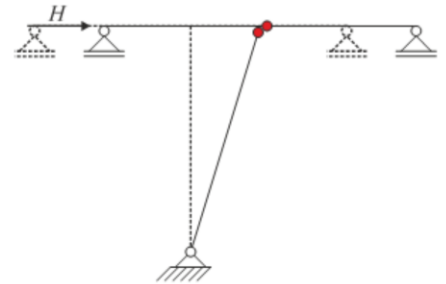
Trägerkette



Verschiebungskette



Knotenverdrehkette



Anzahl der Elementarketten:

$$m = p - n$$

mit

- p Anzahl möglicher Fließgelenke
- n Grad der statischen Unbestimmtheit
- m Anzahl Elementarketten



Kinematischer Satz

Kombinationsketten

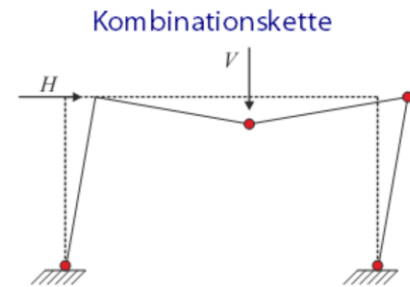
Anzahl der Elementar- + Kombinationsketten:

$$j = 2^m - 1$$

$$k = j - m$$

mit

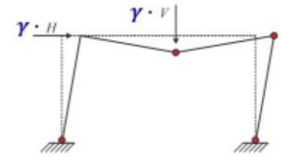
- ***m*** Anzahl Elementarketten
- ***j*** Anzahl Elementar- + Kombinationsketten
- ***k*** Anzahl Kombinationsketten



Berechnungsablauf

Ziel: Bestimmung der **maßgebenden kinematischen Kette** und der zugehörigen **Traglast**.
Die maßgebende Kette ist dann gefunden wenn die zugehörige Traglast ein **Minimum** annimmt.
Die gesuchten äußeren Kräfte lassen sich mit Hilfe des **Prinzips der virtuellen** Verrückungen am verschieblichen System (Starrkörper-verschiebungen und -verdrehungen) ermitteln.

1. Ansatz γ -facher Lasten, gesucht $P_{kin} = \gamma \cdot P$
2. System gemäß einer kinematischen Kette auslenken
3. Ansatz der Verdrehungen (alle bezogen auf ein gemeinsames φ_1)
4. Ansatz der rückdrehenden Momente $M_i = M_{pl,i}$ ($M_{pl,i}$ ohne Interaktionsabminderung)
5. Innere Arbeit formulieren: $W_i = - \sum M_i \cdot \varphi_i$
6. Äußere Arbeit formulieren $W_a = \sum P_i \cdot \delta_i + \sum M_j \cdot \varphi_j$ (wenn M_i denselben Drehsinn hat wie φ , ist A positiv)
7. Äußere und innere Arbeit gleichsetzen: $W_a + W_i = 0$ und nach $P \rightarrow P_{kin}$ auflösen.
8. Ist P_{kin} das Minimum aller ausgelenkter Ketten, so ist die maßgebende Kette gefunden.



8.: oder: ist $|M|$ überall $\leq M_{pl}$

Berechnungsablauf

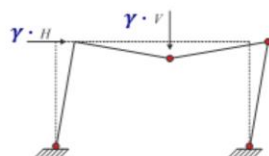
Ziel: Bestimmung der **maßgebenden kinematischen Kette** und der zugehörigen **Traglast**.
Die maßgebende Kette ist dann gefunden wenn die zugehörige Traglast ein **Minimum** annimmt.
Die gesuchten äußeren Kräfte lassen sich mit Hilfe des **Prinzips der virtuellen** Verrückungen am verschieblichen System (Starrkörper-verschiebungen und -verdrehungen) ermitteln.

9. Ermittlung der Schnittgrößen M , N , V

10. Interaktion $M_{pl,Rd} \rightarrow M_{pl,N,V,Rd}$

11. Nach Interaktion zurück zu 6.

Interaktion

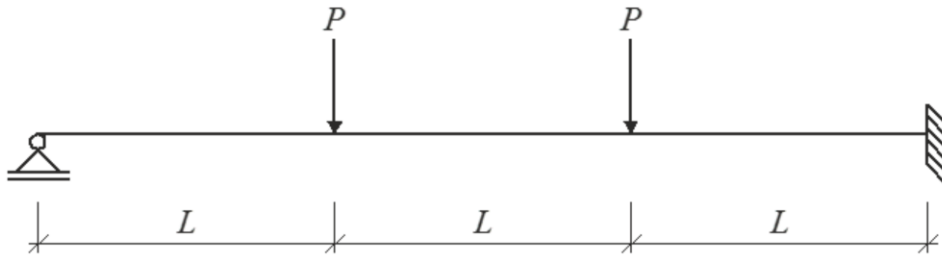


6. Äußere Arbeit formulieren
7. Äußere und innere Arbeit gleichsetzen
8. Ist P_{kin} das Minimum aller ausgelenkten Ketten, so ist die maßgebende Kette gefunden.

Beispiel 1:

gegeben:

Einseitig eingespannter Einfeldträger mit zwei Einzellasten in den Drittelpunkten



gesucht:

- a) Ermittlung der Traglast mithilfe des statischen Satzes („Annäherung von unten“) ohne Berücksichtigung der M-V-Interaktion.
- b) Ermittlung der Traglast mithilfe des kinematischen Satzes („Annäherung von oben“) ohne Berücksichtigung der M-V-Interaktion.
- c) Ermitteln Sie die Schnittgrößenverläufe für die maßgebende Kette unter der in a) und b) ermittelten Traglast.

Beispiel 1 (Annäherung von unten):

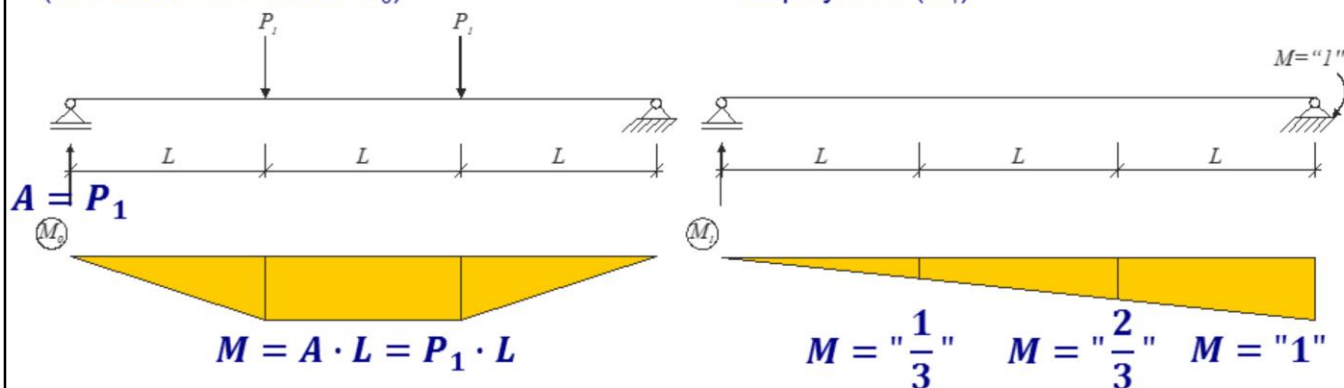
Ermittlung der Last P_1 zum Erreichen des 1. Fließgelenks

Grad der statischen Unbestimmtheit

des Systems? $n = 1$

Wahl eines statisch bestimmten Hauptsystems
(inkl. Momentenverlauf M_0):

Einheitszustand am statisch bestimmten
Hauptsystem (M_1)



Beispiel 1 (Annäherung von unten):

Ermittlung der Last P_1 zum Erreichen des 1. Fließgelenks

Überlagerung der Momentenlinien

$$\begin{aligned} EI \cdot \delta_{10} &= \frac{1}{3} \cdot L \cdot (P_1 \cdot L) \cdot \left(\frac{1}{3} \right) + L \cdot (P_1 \cdot L) \cdot \left(\frac{1/3 + 2/3}{2} \right) + L \cdot (P_1 \cdot L) \\ &\cdot \left(\frac{1 + 2 \cdot 2/3}{6} \right) = \frac{1}{9} \cdot L^2 \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot P_1 + \frac{7}{18} \cdot L^2 \cdot P_1 = L^2 \cdot P_1 \end{aligned}$$

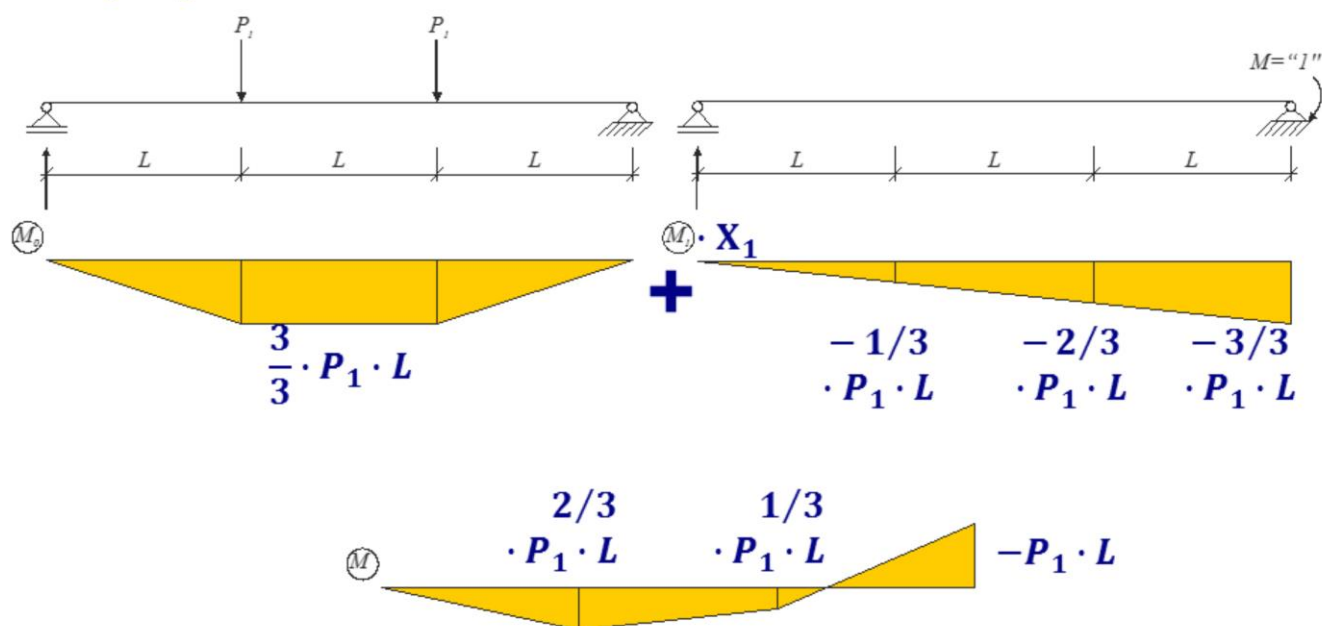
$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot L \cdot (1) \cdot (1) = L$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -L \cdot P_1$$

Beispiel 1 (Annäherung von unten):

Ermittlung der Last P_1 zum Erreichen des 1. Fließgelenks

Überlagerung der Momentenlinien

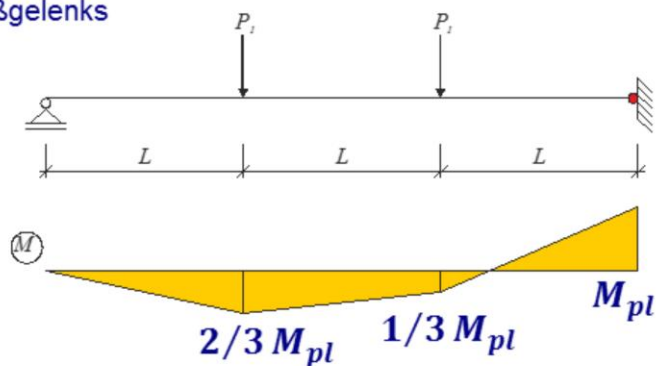


Beispiel 1 (Annäherung von unten):

Ermittlung der Last P_1 zum Erreichen des 1. Fließgelenks

Last P_1 zum Erreichen von M_{pl} :

$$P_1 \cdot L = M_{pl} \Rightarrow P_1 = \frac{M_{pl}}{L}$$



→ Gleichgewicht gegeben (Spannungsverteilung ist statisch zulässig)

→ $M \leq M_{pl}$

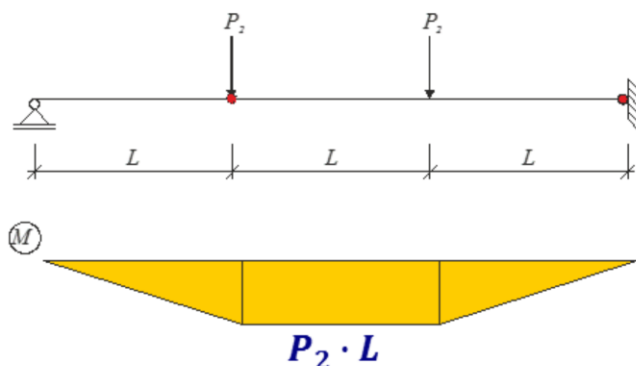
→ keine kinematische Kette

→ weitere Laststeigerung möglich

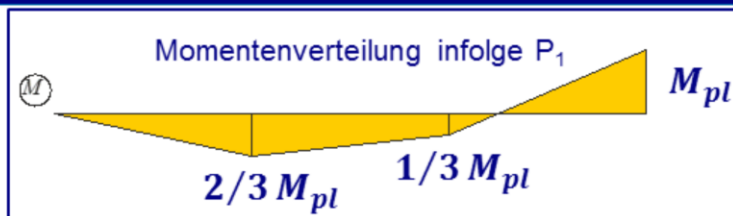
Beispiel 1 (Annäherung von unten):

Ermittlung der Last P_2 zum Erreichen des 2. Fließgelenks

Momentenverteilung infolge P_2



Die Addition der Momentenverteilung infolge P_1 sowie der Momentenverteilung infolge P_2 ergibt die tatsächliche Momentenverteilung.



Auftreten des nächsten Fließgelenkes:

$$M_{pl} = P_2 \cdot L + 2/3 M_{pl} \Rightarrow P_2 = 1/3 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

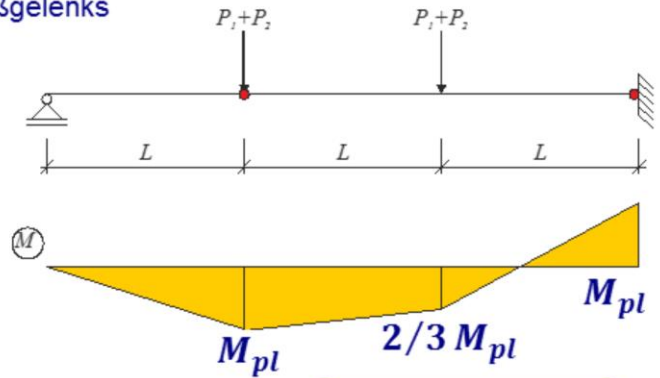
Beispiel 1 (Annäherung von unten):

Ermittlung der Last P_1 zum Erreichen des 1. Fließgelenks

Last P_1 zum Erreichen von M_{pl} :

$$P_1 = \frac{M_{pl}}{L}$$

$$P_2 = 1/3 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



→ Gleichgewicht gegeben (Spannungsverteilung ist statisch zulässig)

statisch zulässig

→ $M \leq M_{pl}$

sicher

→ kinematische Kette ist vorhanden

mit kinem. Kette

→ keine weitere Laststeigerung möglich $P_u = P_1 + P_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Hier: Kirchhoffscher Satz erfüllt (durch Annäherung von unten und Erreichen einer kinematischen Kette)

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems?

$$n = 1$$

Anzahl der Fließgelenke zur Bildung einer kinematischen Kette?

$$f = n + 1 = 2$$

Anzahl der Positionen möglicher Fließgelenke?

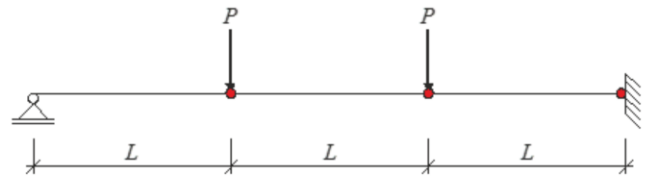
$$p = 3$$

Anzahl Elementarketten?

$$m = p - n = 3 - 1 = 2$$

Gesamtanzahl der Ketten?

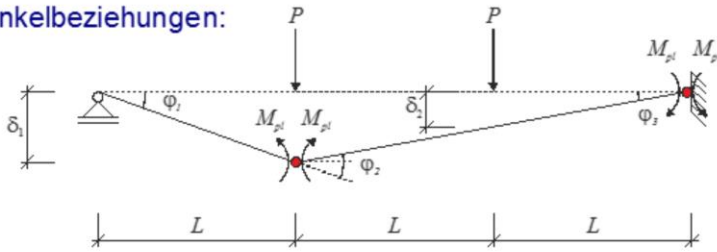
$$j = 2^m - 1 = 2^2 - 1 = 3$$



Beispiel 1 (Annäherung von oben):

1. kinematische Kette

Winkelbeziehungen:



$$\delta_1 = \varphi_1 \cdot L = \varphi_3 \cdot 2 \cdot L$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_3 = \frac{3}{2} \cdot \varphi_1$$

$$\delta_2 = \varphi_3 \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Äußere Arbeit:

$$W_a = P \cdot \delta_1 + P \cdot \delta_2 = P \cdot \varphi_1 \cdot L + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \varphi_1 \cdot L = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Innere Arbeit:

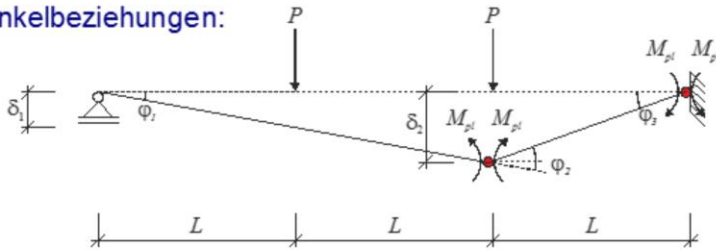
$$W_i = -(M_{pl} \cdot \varphi_3 + M_{pl} \cdot \varphi_2) = -\left(M_{pl} \cdot \frac{3}{2} \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot \frac{1}{2} \cdot \varphi_1\right) = -M_{pl} \cdot 2 \cdot \varphi_1$$

$$\text{Energiebilanz: } W_i + W_a = 0 \Rightarrow M_{pl} \cdot 2 \cdot \varphi_1 = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L \Rightarrow P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

2. kinematische Kette

Winkelbeziehungen:



$$\delta_2 = \varphi_1 \cdot 2 \cdot L = \varphi_3 \cdot L$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = 2 \cdot \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_3 = 3 \cdot \varphi_1$$

$$\delta_1 = \varphi_1 \cdot L$$

Äußere Arbeit:

$$W_a = P \cdot \delta_1 + P \cdot \delta_2 = P \cdot \varphi_1 \cdot L + P \cdot \varphi_1 \cdot 2 \cdot L = 3 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Innere Arbeit:

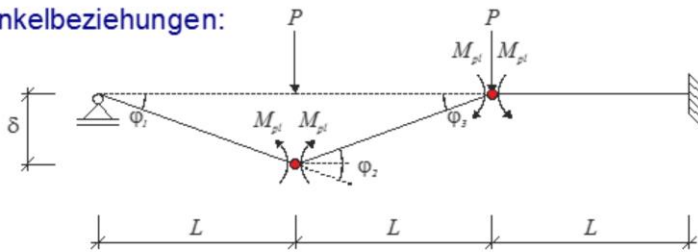
$$W_i = -(M_{pl} \cdot \varphi_3 + M_{pl} \cdot \varphi_2) = -(M_{pl} \cdot 2 \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot 3 \cdot \varphi_1) = -M_{pl} \cdot 5 \cdot \varphi_1$$

Energiebilanz: $W_i + W_a = 0 \Rightarrow M_{pl} \cdot 5 \cdot \varphi_1 = 3 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L \Rightarrow P = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

3. kinematische Kette

Winkelbeziehungen:



$$\delta = \varphi_1 \cdot L = \varphi_3 \cdot L$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1$$

$$\delta = \varphi_1 \cdot L$$

$$\varphi_2 = 2 \cdot \varphi_1$$

Äußere Arbeit:

$$W_a = P \cdot \delta = P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Innere Arbeit:

$$W_i = -(M_{pl} \cdot \varphi_2 + M_{pl} \cdot \varphi_3) = -(M_{pl} \cdot 2 \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot \varphi_1) = -M_{pl} \cdot 3 \cdot \varphi_1$$

Energiebilanz: $W_i + W_a = 0 \Rightarrow M_{pl} \cdot 3 \cdot \varphi_1 = P \cdot \varphi_1 \cdot L \Rightarrow P = 3 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

Maßgebende Kette:

Kette 1: $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$  Kette 1 ist maßgebend! (minimale Traglast)

Kette 2: $P = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Kette 3: $P = \frac{9}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Prüfung des Eindeutigkeitssatzes / Ermittlung des Schnittgrößenverlaufes für die 1. Kette

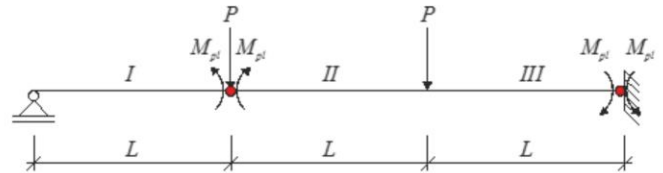
1. das Gleichgewicht ist erfüllt ✓
3. eine kinematische Kette ist im System oder in Systemteilen erreicht ✓
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$) ✓

Anstelle von „2. an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$ “ wird „ $P_u = \min\{P_{kin,i}\}$ “ erfüllt

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

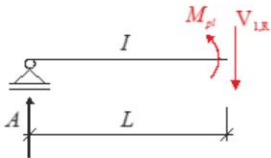
Schnittgrößenverlauf:

Kette 1:
$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Die Schnittgrößenermittlung entspricht derjenigen an statisch bestimmten Systemen; allerdings sind die Momente in den Fließgelenken nicht mit $M=0$ sondern mit $M=M_{pl}$ anzusetzen.

Teilsystem 1:



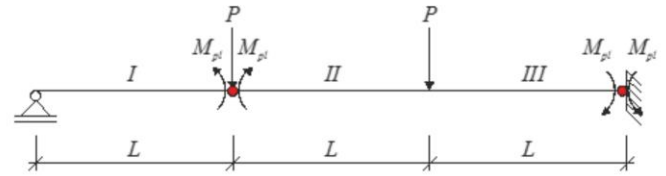
$$\sum M_R = 0 \Rightarrow -M_{pl} + A \cdot L = 0 \Rightarrow A = \frac{M_{pl}}{L}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_{I,R} = A = \frac{M_{pl}}{L}$$

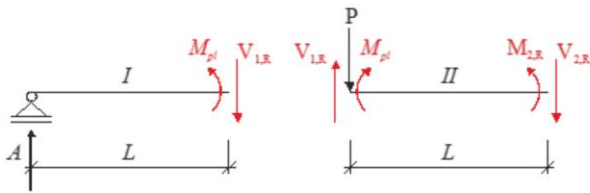
Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 1 (Annäherung von oben): Schnittgrößenverlauf:

Kette 1: $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$



Teilsystem 2:



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_{I,R} - P - V_{II,R} = 0$$

$$\Rightarrow V_{II,R} = V_{I,R} - P$$

$$\Rightarrow V_{II,R} = \frac{M_{pl}}{L} - \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

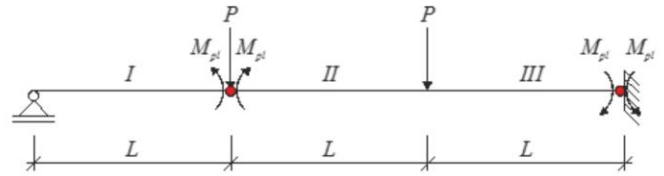
$$\sum M_l = 0 \Rightarrow -M_{II,R} + V_{II,R} \cdot L + M_{pl} = 0$$

$$\Rightarrow M_{II,R} = -\frac{1}{3} \cdot M_{pl} + M_{pl} = \frac{2}{3} \cdot M_{pl} < M_{pl}$$

Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 1 (Annäherung von oben): Schnittgrößenverlauf:

Kette 1: $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$



Teilsystem 3:

$$\sum F_V = 0$$

$$\Rightarrow V_{II,R} - P - V_{III,R} = 0 \Rightarrow V_{III,R} = V_{II,R} - P$$

$$\Rightarrow V_{III,R} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} - \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

$$\sum M_L = 0 \Rightarrow M_{pl} + M_{II,R} + V_{III,R} \cdot L = 0 \Rightarrow M_{pl} + \frac{2}{3} \cdot M_{pl} - \frac{5}{3} \cdot M_{pl} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

Schnittgrößenverlauf:

Kette 1:
$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

1. Gleichgewicht gegeben
(Spannungsverteilung ist statisch zulässig)

2. $M \leq M_{pl}$

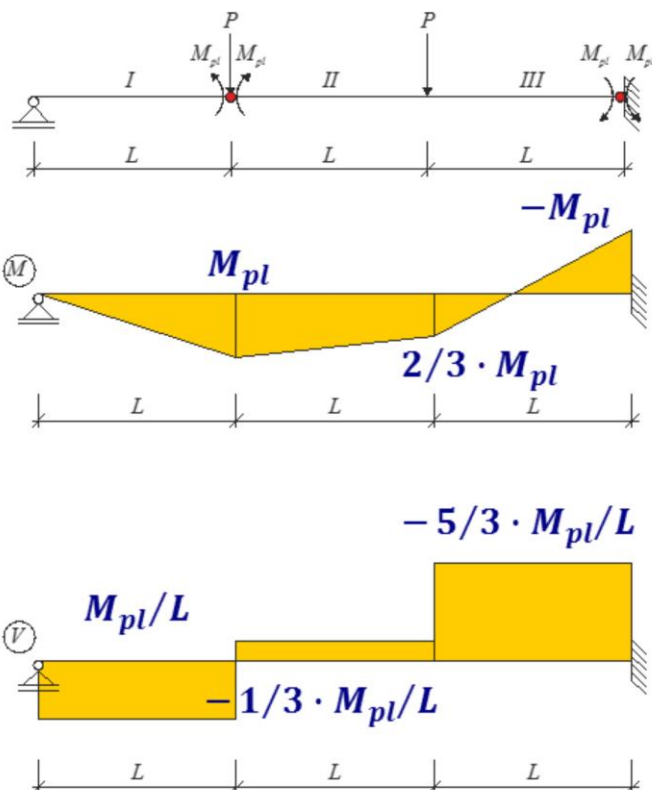
3. kinematische Kette ist vorhanden

4. Dissipationsarbeit ist positiv:

$$D = -W_i > 0$$

→ Die Traglast des Systems beträgt:

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

Kirchhoffscher Einzigkeitssatz

Vorgehensweise kinematische Methode (kinematischer Satz):

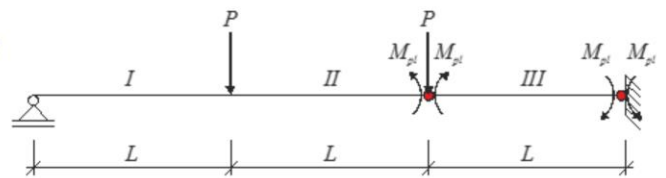
1. Annahme einer kinematisch zulässigen Fließgelenkkette (Bedingung 3.)
2. Bestimmung von P_{kin} mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung (PvV) (Bedingung 1. + 4.)
3. Überprüfen, ob Fließbedingung (2.) im gesamten Tragwerk erfüllt ist (dann: $P_{kin} = P_u$)
oder
Untersuchung aller möglicher Fließgelenkketten, Vergleich der Traglasten $P_u = \min\{P_{kin,i}\}$

Es soll nun exemplarisch gezeigt werden, dass für die Ketten, die nicht die kleinste Traglast aufweisen, d.h für die $P = \min\{P_{kin,i}\}$ nicht erfüllen ist, automatisch auch die 2. Bedingung:

an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$

nicht erfüllt ist.

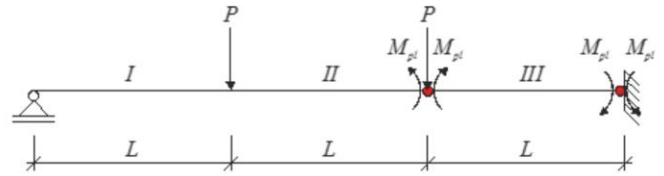
Hierzu wird Kette 2 betrachtet:



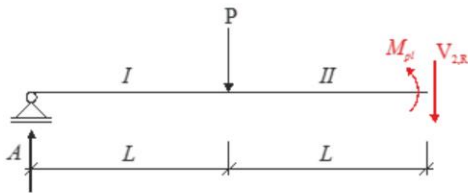
Der kinematische Grenzwertsatz ist unsicher. Er kann verwendet werden, wenn $P_{kin} = P_u$ gefunden wird. Dies wird gewährleistet, indem nach dem kleinsten P_u gesucht wird.

Beispiel 1 (Annäherung von oben): Schnittgrößenverlauf:

Kette 2: $P = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$



Teilsystem 1+2:



$$\sum M_R = 0 \Rightarrow -M_{pl} + A \cdot 2 \cdot L - P \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot 2 \cdot L = M_{pl} + \frac{5}{3} \cdot M_{pl} \Rightarrow A = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

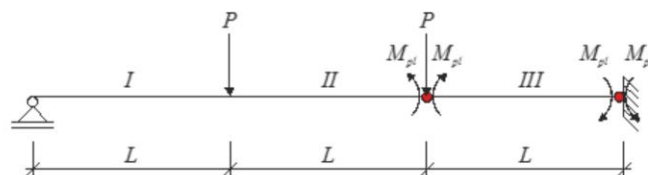
$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_{2,R} = A - P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} - \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 1 (Annäherung von oben):

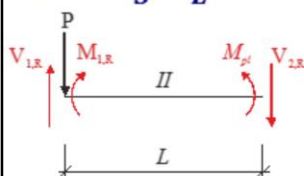
Schnittgrößenverlauf:

Kette 2: $P = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$



Teilsystem 3:

$$V_{2,R} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



$$\sum M_L = 0 \Rightarrow M_{1,R} - M_{pl} + V_{2,R} \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow M_{1,R} = M_{pl} + \frac{1}{3} \cdot M_{pl} > M_{pl}$$



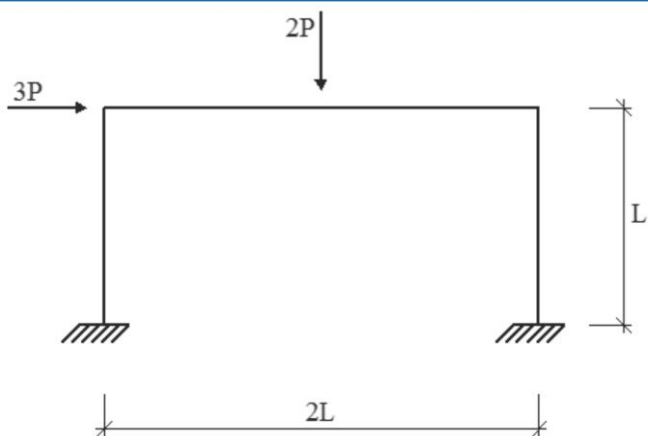
2. Bedingung des Kirchhoffschen Einigkeitssatzes
(an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$)
ist für die 2. Kette nicht erfüllt!

Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 2:

gegeben:

statisches System gemäß Skizze



gesucht:

- Bestimmen sie die Anzahl der möglichen Elementarketten und die Anzahl der möglichen Kombinationen von Elementarketten.
- Ermitteln sie die Traglasten aller möglichen Fließgelenkketten nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung ohne Berücksichtigung der M-N-V Interaktion.
- Bestimmen und zeichnen sie den Verlauf des Biegemoments für die maßgebende Traglast.

Hinweise:

- ebenes Problem
- alle Querschnitte QKL 1
- alle Querschnitte $M_{pl} = \text{konst.}$

Beispiel 2:

Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems?

$$n = 3$$

Anzahl der Fließgelenke zur Bildung einer kinematischen Kette?

$$f = n + 1 = 4$$

Anzahl der Positionen möglicher Fließgelenke?

$$p = 5$$

Anzahl Elementarketten?

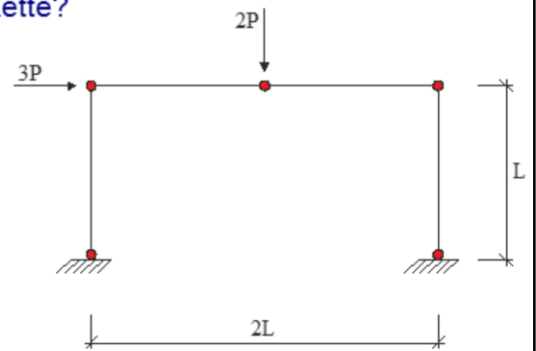
$$m = p - n = 5 - 3 = 2$$

Gesamtanzahl der Ketten?

$$j = 2^m - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

Anzahl der Kombinationsketten?

$$k = j - m = 3 - 2 = 1$$



Beispiel 2:

1. kinematische Kette (1. Elementarkette)

Winkelbeziehungen:

$$\delta = \varphi_1 \cdot L = \varphi_2 \cdot L \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \varphi_1$$

Äußere Arbeit:

$$W_a = 2 \cdot P \cdot \delta = 2 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

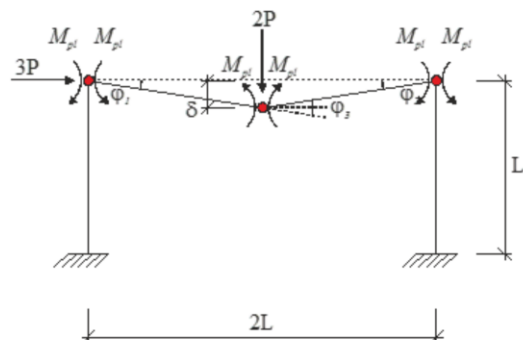
Beachte: Hier nur 3 Fließgelenke $< n + 1 = 4 \rightarrow$ lokale Kette

Innere Arbeit:

$$W_i = -(M_{pl} \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot \varphi_2 + M_{pl} \cdot \varphi_3) = -M_{pl} \cdot 4 \cdot \varphi_1$$

Energiebilanz: $W_i + W_a = 0 \Rightarrow M_{pl} \cdot 4 \cdot \varphi_1 = 2 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Beispiel 2:

2. kinematische Kette (2. Elementarkette)

Winkelbeziehungen:

$$\delta = \varphi_1 \cdot L = \varphi_2 \cdot L \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Äußere Arbeit:

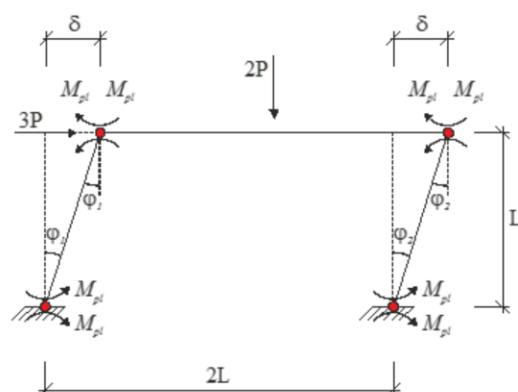
$$W_a = 3 \cdot P \cdot \delta = 3 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Innere Arbeit:

$$W_i = -(2 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_2) = -4 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1$$

Energiebilanz: $W_i + W_a = 0 \Rightarrow 4 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1 = 3 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$

$$\Rightarrow P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Beispiel 2:

3. kinematische Kette (1. Kombinationskette)

Winkelbeziehungen:

$$\delta_1 = \varphi_1 \cdot L = \varphi_2 \cdot L \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\delta_2 = \varphi_1 \cdot L \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \varphi_1$$

Äußere Arbeit:

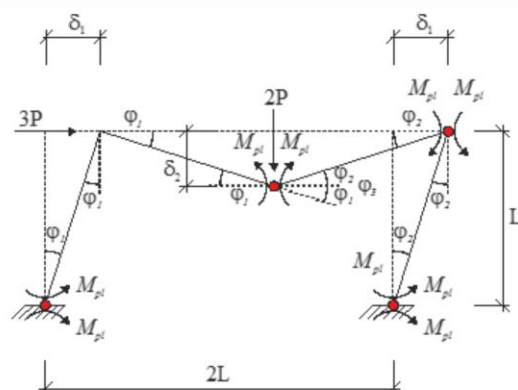
$$W_a = 3 \cdot P \cdot \delta_1 + 2 \cdot P \cdot \delta_2 = 3 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L + 2 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L = 5 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$$

Innere Arbeit:

$$\begin{aligned} W_i &= -(M_{pl} \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_2 + M_{pl} \cdot \varphi_3) \\ &= -(M_{pl} \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1 + M_{pl} \cdot 2 \cdot \varphi_1) = -6 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1 \end{aligned}$$

Energiebilanz: $W_i + W_a = 0 \Rightarrow 6 \cdot M_{pl} \cdot \varphi_1 = 5 \cdot P \cdot \varphi_1 \cdot L$

$$\Rightarrow P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Beispiel 2:

Maßgebende Kette:

Kette 1: $P = 2 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Kette 2: $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{pl}}{L} \approx 1,33 \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Kette 3: $P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L} = 1,2 \cdot \frac{M_{pl}}{L} \Rightarrow$ Kette 3 ist maßgebend! (minimale Traglast)

Prüfung des Eindeutigkeitssatzes

1. das Gleichgewicht ist erfüllt ✓
3. eine kinematische Kette ist im System oder in Systemteilen erreicht ✓
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$) ✓

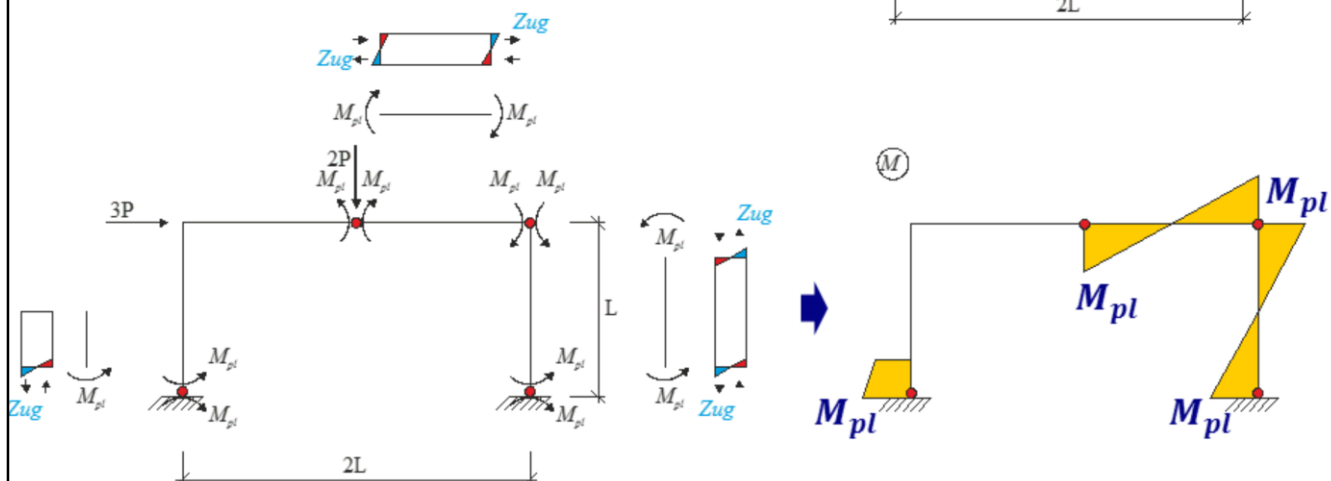
Anstelle von „2. an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$ “ wird „ $P_u = \min\{P_{kin,i}\}$ “ erfüllt

Beispiel 2:

Schnittgrößenverlauf:

Kette 3:
$$P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

Bekannte Momente:



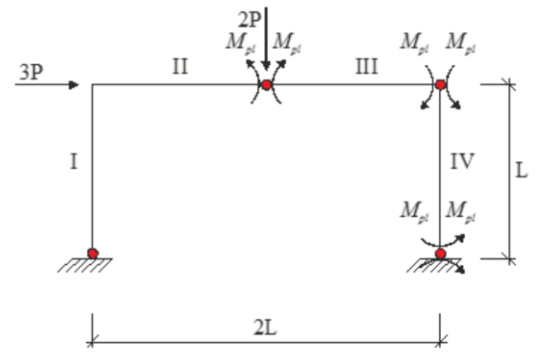
Anzeichnen der Momenten-Pfeilspitzen auf der gedrückten Seite

Beispiel 2:

Schnittgrößenverlauf:

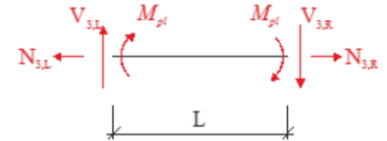
Kette 3: $P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Teilsystem 3:



$$\sum M_R = 0 \Rightarrow M_{pl} + M_{pl} + V_{3,L} \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow V_{3,L} = -\frac{2 \cdot M_{pl}}{L}$$



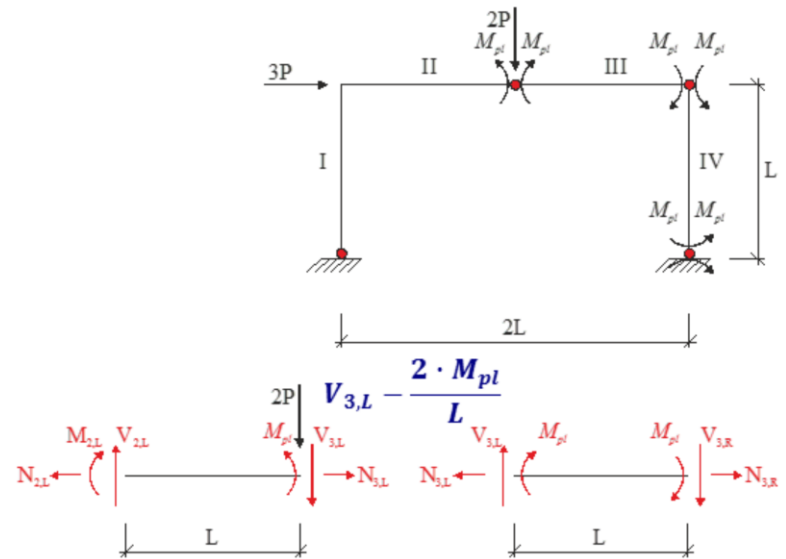
Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

Beispiel 2:

Schnittgrößenverlauf:

Kette 3: $P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$

Teilsystem 2:



$$\sum M_L = 0 \Rightarrow M_{2,L} - M_{pl} + V_{3,L} \cdot L + 2 \cdot P \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow M_{2,L} - M_{pl} - \frac{2 \cdot M_{pl}}{L} \cdot L + 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L} \cdot L \Rightarrow M_{2,L} = M_{pl} + 2 \cdot M_{pl} - \frac{12}{5} \cdot M_{pl}$$

$$\Rightarrow M_{2,L} = \frac{3}{5} \cdot M_{pl} < M_{pl}$$

Schnittkräfte sind rot eingezeichnet, M ist an bestimmten Stellen bekannt!

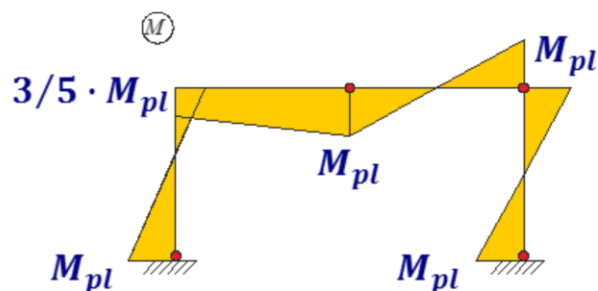
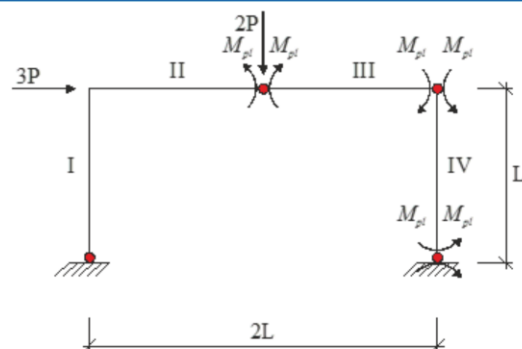
Beispiel 2:

Schnittgrößenverlauf:

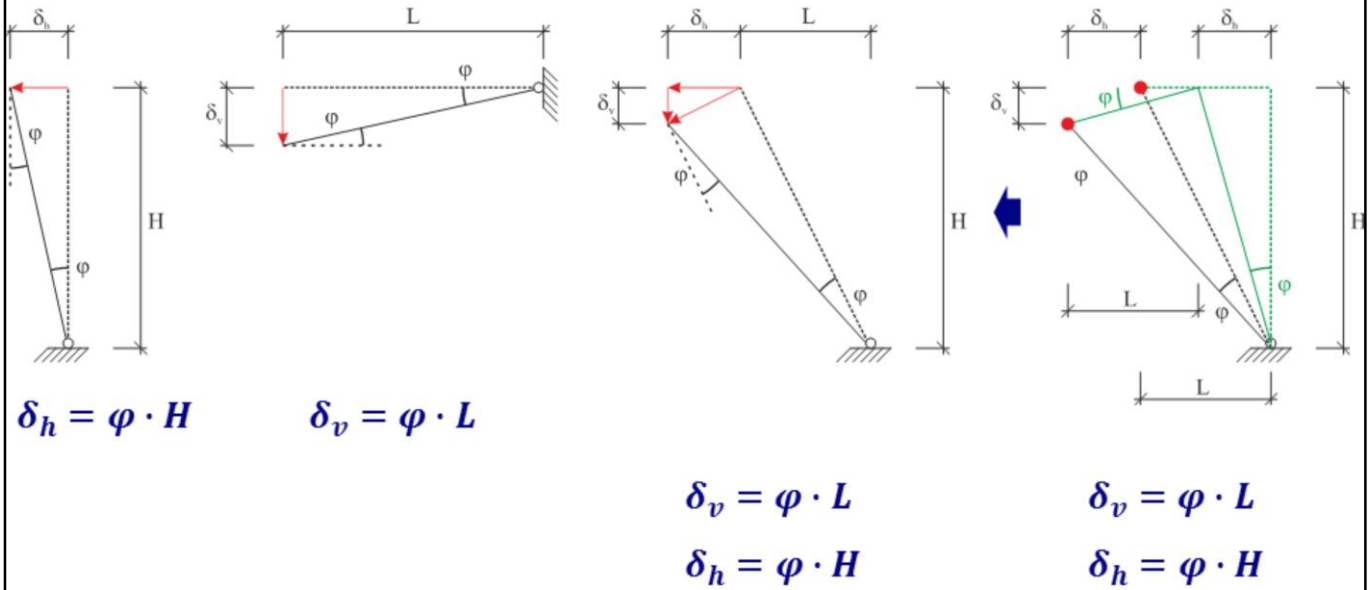
Kette 3:
$$P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$

- Gleichgewicht gegeben
(Spannungsverteilung ist statisch zulässig)
- $M \leq M_{pl}$
- kinematische Kette ist vorhanden
- Dissipationsarbeit ist positiv:
 $D = -W_i > 0$
- Die Traglast des Systems beträgt:

$$P = \frac{6}{5} \cdot \frac{M_{pl}}{L}$$



Kinematische Beziehungen



Beispiel 3:

gegeben:

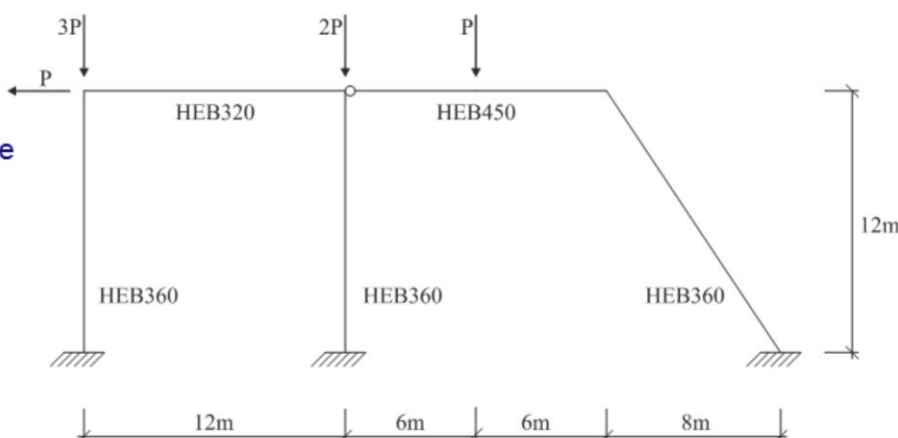
statisches System gemäß Skizze

gesucht:

- Bestimmen sie die Anzahl der möglichen Elementarketten und die Anzahl der möglichen Kombinationen von Elementarketten.
- Ermitteln sie die Traglasten aller möglichen Fließgelenkketten nach der Fließgelenktheorie I. Ordnung ohne Berücksichtigung der M-N-V-Interaktion.
- Zeichnen Sie den Schnittgrößenverlauf (M, N und V) für die maßgebende Traglast.
- Ermitteln Sie die Traglast des Systems nach Fließgelenktheorie I. Ordnung unter Berücksichtigung von M-N-V-Interaktion.

Hinweise:

- ebenes Problem
- alle Querschnitte QKL 1
- alle Querschnitte $M_{pl} = \text{konst.}$



		$M_{pl,y} [kNm]$	$V_{pl,z} [kN]$	$N_{pl} [kN]$
1	HEB 360	573,2	747,4	3859
2	HEA 320	347,8	507,3	2657
3	HEA 450	687,0	811,4	3803

Beispiel 3:

Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems?

$$n = 5$$

Anzahl der Fließgelenke zur Bildung einer kinematischen Kette?

$$f = n + 1 = 6$$

Anzahl der Positionen möglicher Fließgelenke?

$$p = 7$$

Anzahl Elementarketten?

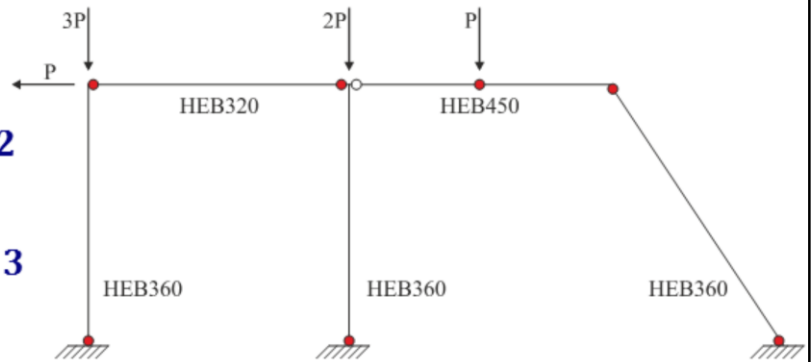
$$m = p - n = 7 - 5 = 2$$

Gesamtanzahl der Ketten?

$$j = 2^m - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

Anzahl der Kombinationsketten?

$$k = j - m = 3 - 2 = 1$$



Beispiel 2:

1. kinematische Kette (1. Elementarkette)

Winkelbeziehungen:

$$\delta = \varphi \cdot 6m$$

Innere Arbeit:

$$\begin{aligned} -W_i &= \\ 687,0 \cdot 2 \cdot \varphi + 573,2 \cdot \varphi \\ &= 1.947,2 \cdot \varphi \end{aligned}$$

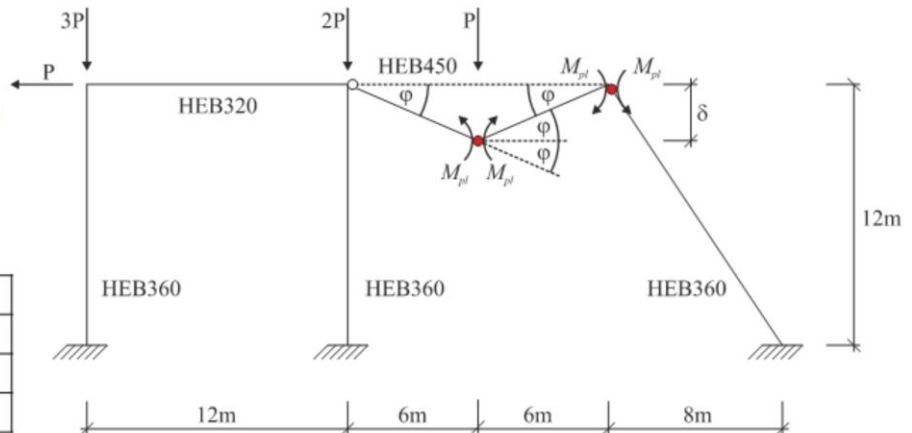
Äußere Arbeit:

$$W_a = P \cdot \delta = P \cdot \varphi \cdot 6m$$

Energiebilanz:

$$\begin{aligned} W_a - W_i &= 0 \Rightarrow P \cdot \varphi \cdot 6m \\ &= 1.947,2 \cdot \varphi \\ \Rightarrow P &= 324,53kN \end{aligned}$$

	$M_{pl,y} [kNm]$
HEB 360	573,2
HEA 320	347,8
HEA 450	687,0



Beispiel 2:

2. kinematische Kette (2. Elementarkette)

Winkelbeziehungen:

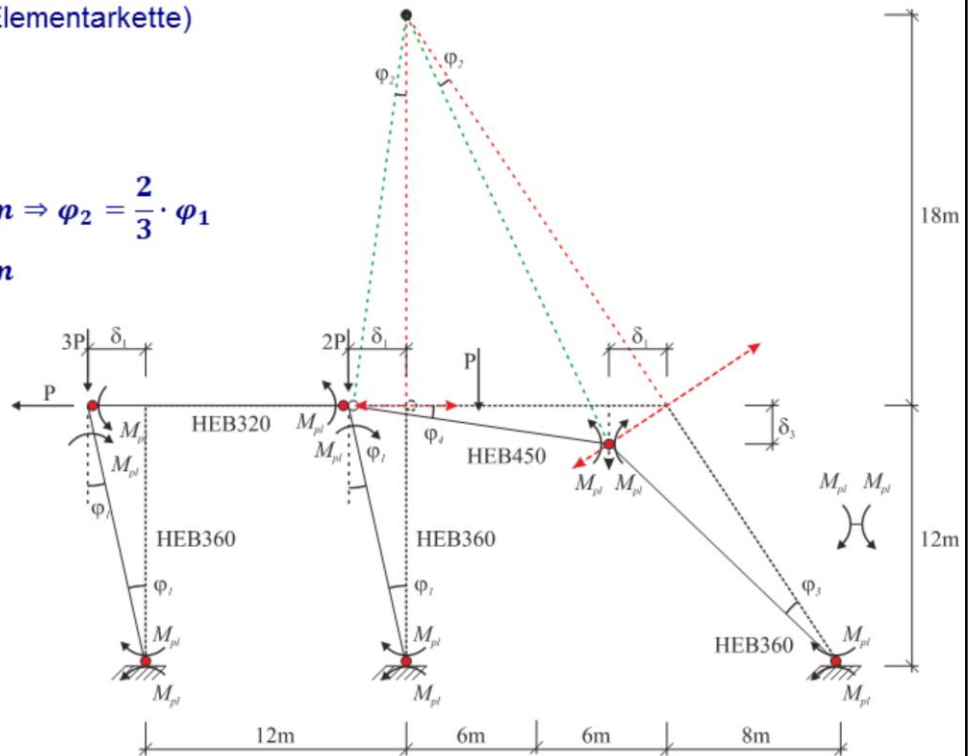
$$\delta_1 = \varphi_1 \cdot 12m$$

$$\delta_1 = \varphi_2 \cdot 18m = \varphi_1 \cdot 12m \Rightarrow \varphi_2 = \frac{2}{3} \cdot \varphi_1$$

$$\delta_1 = \varphi_3 \cdot 12m = \varphi_1 \cdot 12m \\ \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1$$

$$\delta_3 = \varphi_3 \cdot 8m \\ = \varphi_4 \cdot 12m \\ \Rightarrow \varphi_4 = \frac{8}{12} \cdot \varphi_3 \\ \Rightarrow \varphi_4 = \frac{2}{3} \cdot \varphi_1$$

$$\delta_3 = \varphi_3 \cdot 8m \\ = \varphi_1 \cdot 8m$$



Beispiel 2:

2. kinematische Kette (2. Elementarkette)

Innere Arbeit:

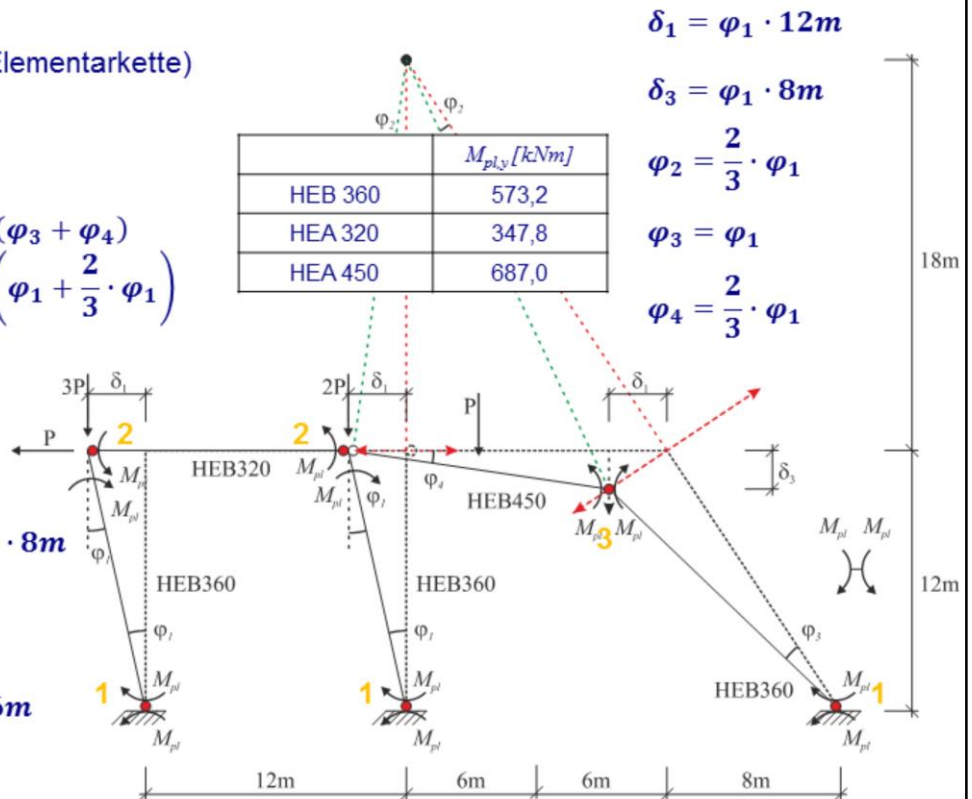
$$\begin{aligned}
 -W_i &= 3 \cdot 573,2 \cdot \varphi_1 \quad \text{1} \\
 &+ 2 \cdot 347,8 \cdot \varphi_1 + 573,2 \cdot (\varphi_3 + \varphi_4) \\
 &= 2.415,2 \cdot \varphi_1 + 573,2 \cdot \left(\varphi_1 + \frac{2}{3} \cdot \varphi_1 \right) \\
 &= 3.370,53 \text{ kNm} \cdot \varphi_1
 \end{aligned}$$

Äußere Arbeit:

$$\begin{aligned}
 W_a &= P \cdot \delta_1 + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_3 \\
 &= P \cdot \varphi_1 \cdot 12 \text{ m} + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \varphi_1 \cdot 8 \text{ m} \\
 &= P \cdot \varphi_1 \cdot 16 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Energiebilanz:

$$\begin{aligned}
 W_a - W_i &= 0 \Rightarrow P \cdot \varphi_1 \cdot 16 \text{ m} \\
 &= 3.370,53 \text{ kNm} \cdot \varphi_1 \\
 \Rightarrow P &= 210,66 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



Beispiel 2:

3. kinematische Kette (1. Kombinationskette)

Winkelbeziehungen:

wie zuvor (Kette 2)

$$\delta_1 = \varphi_1 \cdot 12m$$

$$\delta_1 = \varphi_2 \cdot 18m = \varphi_1 \cdot 12m \Rightarrow \varphi_2 = \frac{2}{3} \cdot \varphi_1$$

$$\delta_1 = \varphi_3 \cdot 12m = \varphi_1 \cdot 12m$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1$$

$$\delta_3 = \varphi_3 \cdot (8m + 6m)$$

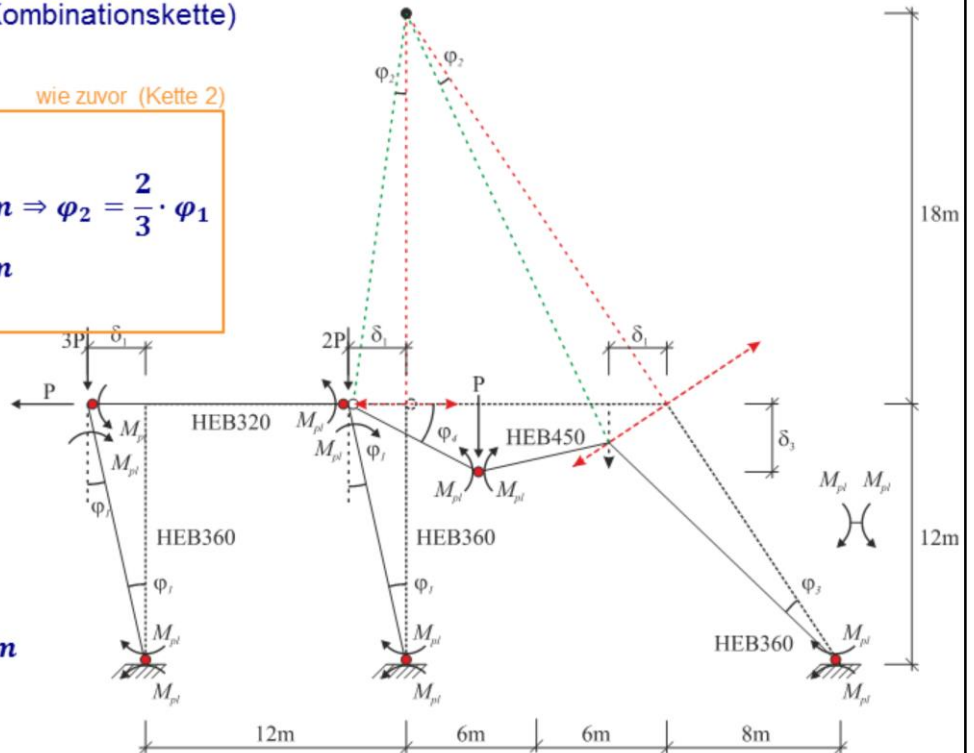
$$= \varphi_4 \cdot 6m$$

$$\Rightarrow \varphi_4 = \frac{14}{6} \cdot \varphi_3$$

$$\Rightarrow \varphi_4 = \frac{7}{3} \cdot \varphi_1$$

$$\delta_3 = \varphi_4 \cdot 6m = \frac{7}{3} \cdot \varphi_1 \cdot 6m$$

$$= 14m \cdot \varphi_1$$



Beispiel 3:

Maßgebende Kette:

Kette 1: $P = 324,53kN$

Kette 2: $P = 210,66kN$

Kette 3: $P = 180,97kN$



Kette 3 ist maßgebend! (minimale Traglast)

Prüfung des Eindeutigkeitssatzes

1. das Gleichgewicht ist erfüllt ✓
3. eine kinematische Kette ist im System oder in Systemteilen erreicht ✓
4. die Dissipationsarbeit ist positiv ($D = -A_i$) ✓

Anstelle von „2. an jeder Stelle des Systems ist erfüllt: $|M| \leq M_{pl}$ “ wird „ $P_u = \min\{P_{kin,i}\}$ “ erfüllt

Nun: Ermittlung der Schnittgrößenverläufe für die 3. Kette (zur M-N-V-Interaktion)